ELECTRICITE

Analyse des signaux et des circuits électriques

Michel Piou

Chapitre 9
Valeur moyenne des signaux périodiques.

Edition 11/03/2014

Table des matières

Temps de travail estimé pour un apprentissage de ce chapitre en autonomie : 7 heures

VALEUR MOYENNE DES SIGNAUX PERIODIQUES.

1 POURQUOI ET COMMENT ?

Lorsqu'on veut décrire un signal variable sans utiliser une description trop détaillée, on peut se contenter d'indiquer la moyenne de ses valeurs sur un intervalle donné.
Lorsque ce signal est périodique, on s'intéresse plus particulièrement à la moyenne de ses valeurs sur un intervalle d'une période. Cette information peut s'avérer suffisante lorsque ce signal est appliqué à un dispositif lent uniquement sensible à la moyenne des sollicitations qu'il reçoit.

Prérequis :
Intégrale simple d'une fonction.

Objectifs :
Détermination de la valeur moyenne d'un signal périodique.

Méthode de travail :
Les signaux périodiques que nous allons rencontrer seront souvent décrits par un graphe.
Aussi, plutôt que de nous précipiter sur les calculs mathématiques, nous privilégierons, autant que possible, une approche plus intuitive et graphique.
L'objectif étant d'arriver au résultat juste le plus rapidement possible, peut être faudra-t-il lutter contre le célèbre proverbe : *« Plus c'est matheux, plus c'est sérieux ! »*.

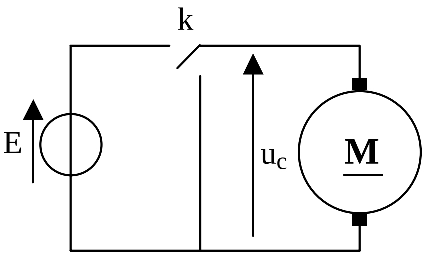
Travail en autonomie :
Pour permettre une étude du cours de façon autonome, les réponses aux questions du cours sont données en fin de document.

Corrigés en ligne :
Pour permettre une vérification autonome des exercices, consulter « Baselecpro »
(chercher « baselecpro accueil » sur Internet avec un moteur de recherche)

2 INTERET DE LA NOTION DE VALEUR MOYENNE.

Avant de donner une définition précise de la valeur moyenne, nous allons préciser son intérêt au moyen de deux exemples. (Ces exemples n'ont qu'une valeur d'illustration, ils ne sont pas à retenir).

2.1 Exemple N°1 : variation de vitesse d'un moteur électrique alimenté par un hacheur.

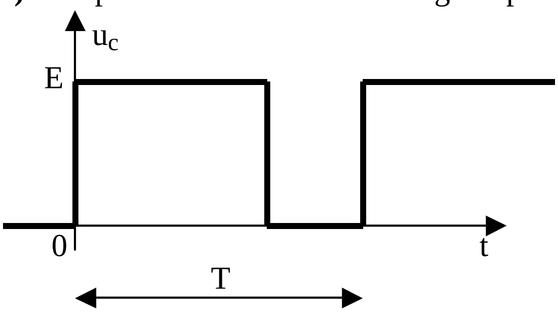


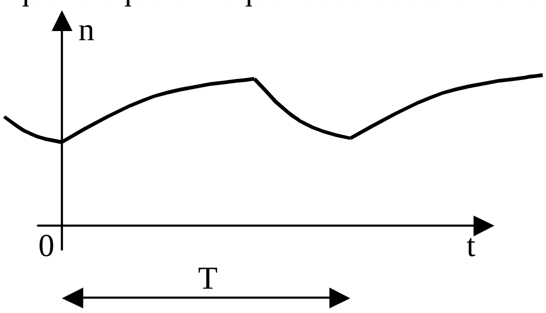
« k » est un commutateur réalisé avec des composants électroniques. Il agit de façon à ne pas interrompre le courant dans le moteur (de nature inductive).

E est une tension continue.

Les basculements périodiques de « k » génèrent une tension $u_c(t)$ en créneaux qui entraîne la rotation du moteur électrique à une vitesse n(t).

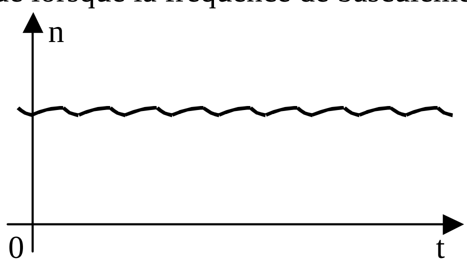
a) Comportement du moteur en régime périodique lorsque la fréquence de basculement de « k » est faible :





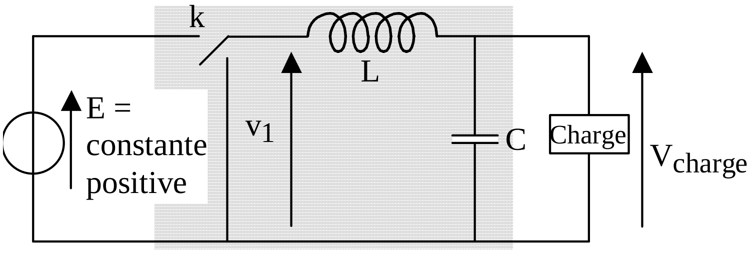
Lorsque $u_c(t) = E$: le moteur accélère. Lorsque $u_c(t) = 0$: le moteur ralentit.

b) Comportement du moteur en régime périodique lorsque la fréquence de basculement de « k » est élevée :



Conclusion : Plus la fréquence de basculement de « k » est élevée, plus la vitesse du moteur tend vers une constante déterminée par la **moyenne des valeurs** de $u_c(t)$

2.2 Exemple N°2 : comportement d'une alimentation à découpage.

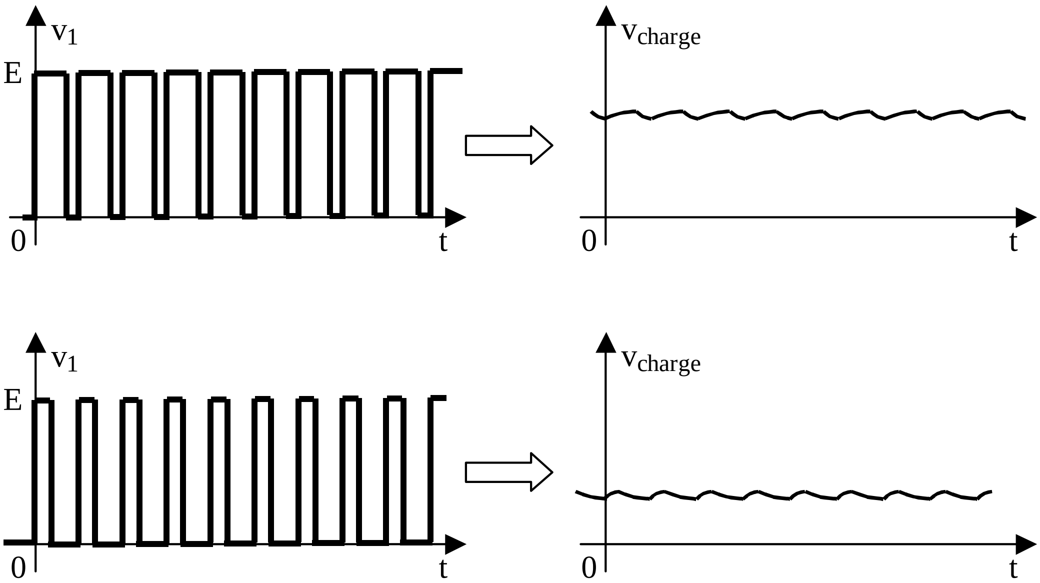


« k » est un commutateur réalisé avec des composants électroniques

E est une tension continue.

Les basculements périodiques de « k » génèrent une tension $v_1(t)$ en créneaux. L'inductance freine les variations du courant dans C et dans la charge. Le condensateur C freine les variations de la tension aux bornes de la charge.

Si la fréquence de fonctionnement de k est assez élevée, le condensateur n'a pas le temps de se charger et de se décharger de façon importante.
La tension V_{charge} est quasiment constante. Sa valeur dépend de la moyenne des valeurs de v1(t).



En conclusion : Si on associe un dispositif rapide avec un dispositif beaucoup plus lent, le dispositif le plus lent est généralement sensible à la moyenne des sollicitations qu'il reçoit du dispositif rapide.

Le dispositif lent est sensible à la « valeur moyenne » des signaux que lui applique le dispositif rapide.

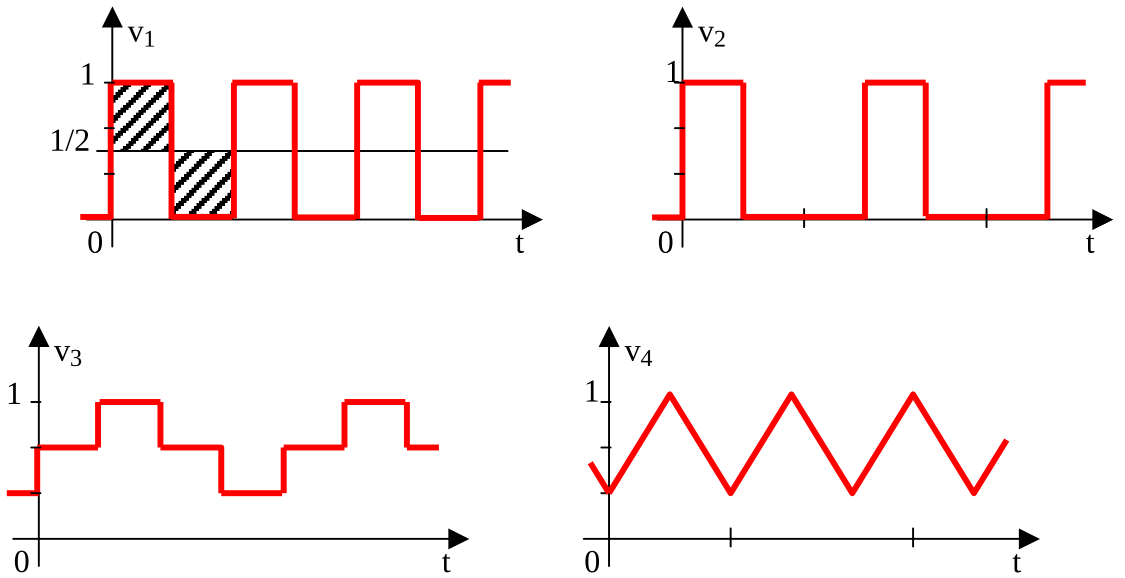
3 VALEUR MOYENNE D'UNE FONCTION PERIODIQUE.

3.1 Valeur moyenne: première définition.

Avant d'exprimer la définition de la valeur moyenne de façon mathématique, il est bon de retenir cette définition simple:

"La valeur moyenne d'une grandeur périodique est la moyenne des valeurs de cette grandeur". (1)

Exemple: Déterminer intuitivement et représenter la valeur moyenne des trois fonctions périodiques v_2, v_3 et v_4 suivantes en hachurant des aires convenablement choisies (en s'inspirant du modèle v_1) *(Réponse 1:)*



Nous pouvons constater que nous disposons d'une connaissance intuitive de la notion de valeur moyenne. Nous nous en servirons…

3.2 Notations normalisées de la valeur moyenne.

La valeur moyenne d'une fonction périodique $f(t)$ est notée de façon normalisée :

$\overline{F}$ ou $< F >$ (On rencontre également F_{moy}, mais ce n'est pas une norme internationale)

---

(1) Dans ce cours, nous réserverons la notion de "valeur moyenne" à des grandeurs périodiques.

3.3 Valeur moyenne: deuxième définition.

Reprenons l'un des exemples précédents:

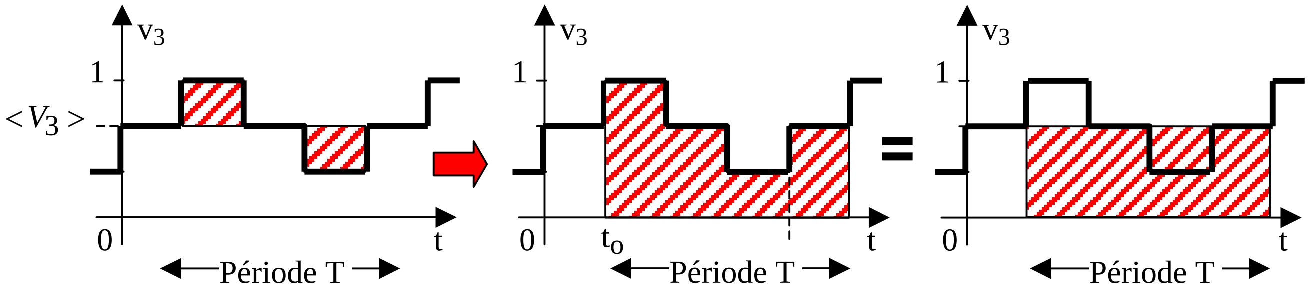


Fig 1 Fig 2 Fig 3

Sur la figure 1 : **Sur un intervalle d'une période**, nous avons **hachuré les aires** entre la fonction et la droite représentant la valeur moyenne.
Nous avons constaté intuitivement que, sur une période, l'aire hachurée « au-dessus » de la valeur moyenne est égale à l'aire hachurée au-dessous.

Nous en déduisons que l'aire hachurée sur la figure 2 est égale à l'aire hachurée sur la figure 3.

En conséquence :

« Aire sous la courbe sur un intervalle d'une période » = Valeur moyenne x Période

D'où la seconde définition de la valeur moyenne :

$$\textbf{Valeur moyenne} = \frac{\textbf{aire sous la courbe sur un intervalle d'une période}}{\textbf{Période}}$$

3.4 Valeur moyenne: troisième définition.

L'aire sous la courbe sur un intervalle d'une période peut être calculée au moyen d'une intégrale.
D'où la troisième définition de la valeur moyenne :

$$\Rightarrow \textbf{Valeur moyenne} = \frac{\textbf{1}}{\textbf{Période}} \cdot \int_{\textbf{to}}^{\textbf{to + Période}} \textbf{fonction(t) . dt}$$

L'intégrale peut être calculée sur un intervalle d'une période à **partir d'un point to quelconque**.

La période est souvent désignée par la lettre « T ».

3.5 La valeur moyenne ne dépend pas de la graduation linéaire choisie sur l'axe des abscisses :

De la démonstration suivante, on ne retiendra que la conclusion.

Rappel mathématique :

Soit une fonction *u(x)* continue sur [a , b] .

Soit une fonction $F\left(u(x)\right)$ continue sur [u(a) , u(b)] .

Soit $f\left(u(x)\right) = F'\left(u(x)\right) = \dfrac{d\ F\left(u(x)\right)}{d\ u(x)}$.

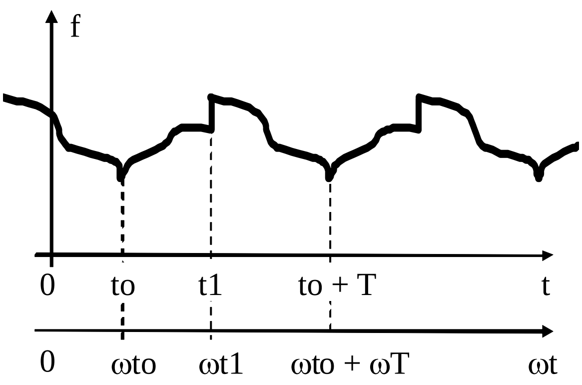
$$\Rightarrow \frac{d\ F\left(u(x)\right)}{d\ x} = \frac{d\ F\left(u(x)\right)}{d\ u(x)} \cdot \frac{d\ u(x)}{d\ x} = f\left(u(x)\right) . u'(x)$$ (dérivée d'une fonction composée).

$$\Rightarrow \int_a^b f\left(u(x)\right) . u'(x)\, dx = F\left(u(b)\right) - F\left(u(a)\right) = \int_{u(a)}^{u(b)} f\left(u(x)\right) . d\left(u(x)\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_a^b f\left(u(x)\right) . u'(x)\, dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f\left(u(x)\right) . d\left(u(x)\right)}$$

Application: changement de variable dans le calcul des valeurs moyennes.

Soit une fonction $f\left(\omega.t\right)$ (avec ω constante) continue par morceaux (discontinuité en t1), périodique de période T.



$$< F > = \frac{1}{T} \int_{to}^{to+T} f\left(\omega.t\right).dt$$

$$\Rightarrow < F > = \frac{1}{T} \left[\int_{to}^{t1^-} f\left(\omega.t\right).dt + \int_{t1^+}^{to+T} f\left(\omega.t\right).dt \right]$$

$$\Rightarrow < F > = \frac{1}{T\omega} \left[\int_{to}^{t1^-} f\left(\omega.t\right)\omega\ dt + \int_{t1^+}^{to+T} f\left(\omega.t\right)\omega\ dt \right]$$

$$\Rightarrow < F > = \frac{1}{T\omega} \left[\int_{\omega.to}^{\omega.t1^-} f\left(\omega.t\right) d\left(\omega.t\right) + \int_{\omega.t1^+}^{\omega.to+\omega.T} f\left(\omega.t\right) d\left(\omega.t\right) \right]$$

En conclusion :

La valeur moyenne est indépendante de l'échelle linéaire utilisée en abscisse (t ou ω.t).

$$\Rightarrow \overline{F} = \underbrace{\frac{1}{T} \int_{to}^{to+T} f\left(\omega.t\right).dt}_{graduation\ \ en\ «\, t\, »} = \underbrace{\frac{1}{\omega.T} \int_{\omega.to}^{\omega.to+\omega.T} f\left(\omega.t\right).\ d(\omega.t)}_{graduation\ \ en\ «\, \omega.t\, »}$$

Lorsque la fonction dont on veut calculer la valeur moyenne est constituée de morceaux de sinusoïdes de pulsation $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, il est généralement plus facile d'utiliser la variable θ = ω.t.

$$< F > = \frac{1}{T}\int_{to}^{to+T} f(t).dt = \frac{1}{\omega.T}\int_{\omega.to}^{\omega.to+2\pi} f(\omega.t).\, d(\omega.t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta o}^{\theta o+2\pi} f(\theta).d\theta$$

3.6 Résumé de la méthode de calcul de la valeur moyenne :

- Si on dispose du graphe de la fonction, il est vivement conseillé de représenter une estimation de la valeur moyenne en hachurant, sur un intervalle d'une période, les aires « au-dessus » et « au-dessous ».

- Si la méthode précédente (a)) ne donne pas un résultat suffisamment précis, on peut, dans les cas simples, calculer l'aire sous la courbe en utilisant la géométrie et utiliser :

$$Valeur\ moyenne = \frac{aire\ sous\ la\ courbe\ sur\ un\ intervalle\ d'une\ période}{Période}$$

- Si la méthode précédente (b)) ne donne pas un résultat satisfaisant, on se résignera à utiliser un calcul intégral.

Mais dans ce dernier cas, il convient d'adopter une démarche très méthodique :

- ➢ Choisir une origine des abscisses de façon que la description de la fonction soit simple. (2)
- ➢ Choisir une graduation linéaire pour l'axe des abscisses (x, t ou θ où …) et représenter cette graduation sur la courbe. (3)
- ➢ Identifier la période.
- ➢ Identifier les bornes d'intégration sur un intervalle d'une période (On peut commencer en un point différent de zéro).
- ➢ Identifier l'expression de la fonction (éventuellement morceau par morceau)
- ➢ Poser l'intégrale en veillant à **n'utiliser que le paramètre retenu pour l'axe des abscisses**.

(2) Le résultat du calcul ne dépend pas de l'origine choisie
(3) Le résultat du calcul ne dépend pas de la graduation linéaire choisie

3.7 Exemples de calculs de valeurs moyennes :

Déterminer la valeur moyenne des quatre fonctions suivantes *(Réponse 2:)*

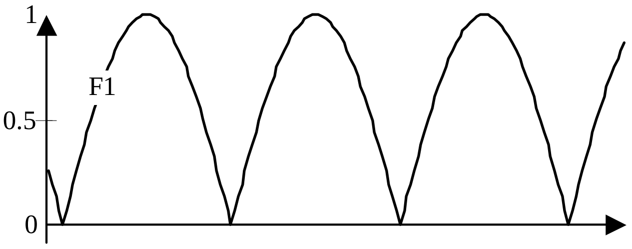


Figure 1

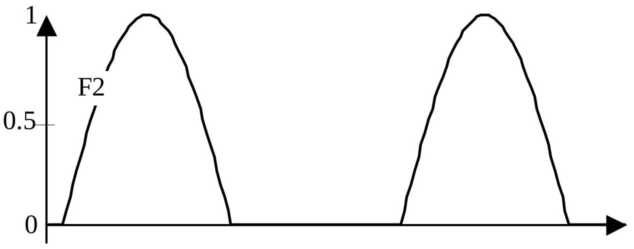


Figure 2

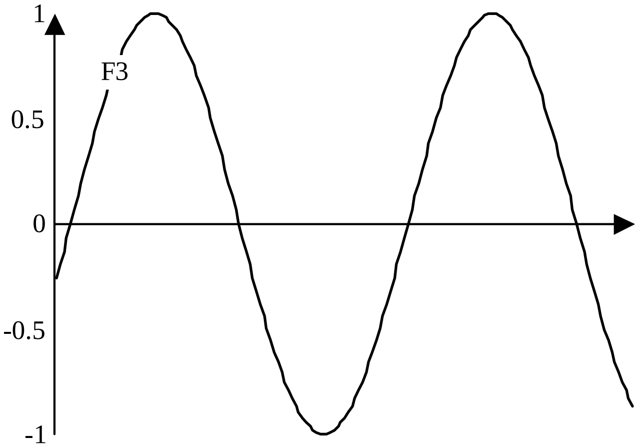


Figure 3

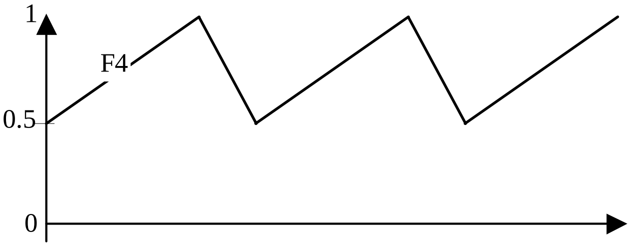
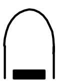


Figure 4

N'oubliez pas la méthode du paragraphe 3.6 !

3.8 Mesure d'une valeur moyenne:

La mesure des courants et des tensions moyens se fait avec des appareils **magnétoélectriques** (on dit aussi "à cadre mobile"), ou des appareils **numériques** sur des **calibres** (4) **« continu »** ou **« DC »** (pour « Direct Curent ») ou **« AV »** (pour « Average ») ou « **=** ». (5)

Symbole d'un appareil magnétoélectrique : 

Les appareils magnétoélectriques sont de plus en plus remplacés par les appareils numériques.

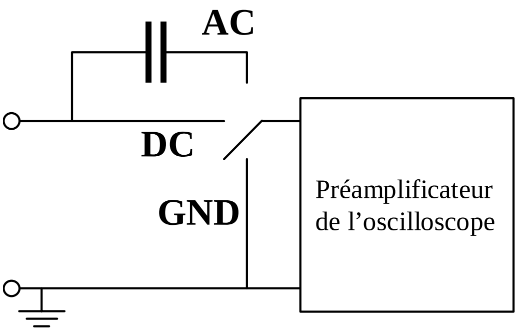
(4) « calibre » : Position d'un bouton de réglage.
(Le bouton qui positionne l'appareil de mesure en « valeur moyenne » varie suivant les types d'appareils).
(5) Le terme anglais « Average » se traduit en français par « moyenne ».

3.9 Composante continue et composante alternative. DC/AC.

Pour désigner la « **valeur moyenne** », on emploie aussi l'expression « **composante continue** ». Les deux expressions sont équivalentes.

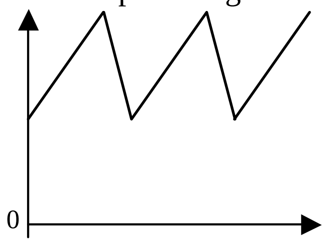
La « **composante alternative** » d'une fonction périodique f(t) est l'expression $f(t) - F_{moy}$.

Un **oscilloscope** est un appareil capable de visualiser le graphe des tensions qu'on lui applique en fonction du temps. Chaque entrée de mesure est équipée d'une possibilité de choix entre trois options :

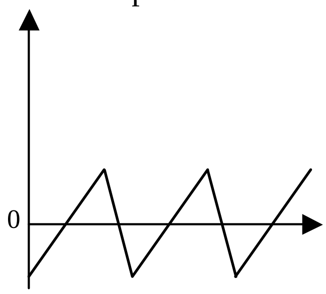


« **DC** » ou « **CC** » qui dans ce cas signifie « entrée directe » : Le signal à mesurer est transmis directement à l'étage préamplificateur.
« **AC** » ou « **CA** » qui dans ce cas signifie « composante alternative » : Le signal à mesurer est transmis à l'étage préamplificateur au travers d'un condensateur qui bloque la composante continue et transmet uniquement la composante alternative.
« **GND** » qui signifie « ground », c'est à dire la référence (ou « masse ») : Dans cette position l'entrée de l'oscilloscope est mise à zéro, ce qui permet de régler le zéro de l'écran. (6)

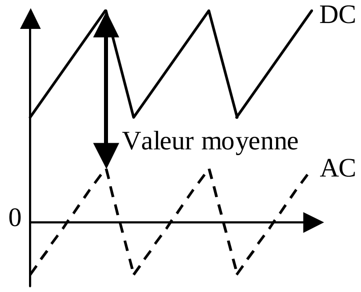
Voici un exemple de signal observé à l'oscilloscope :



Observé en DC

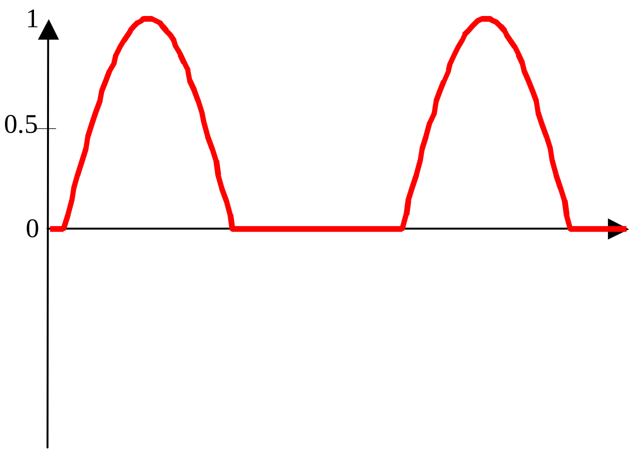


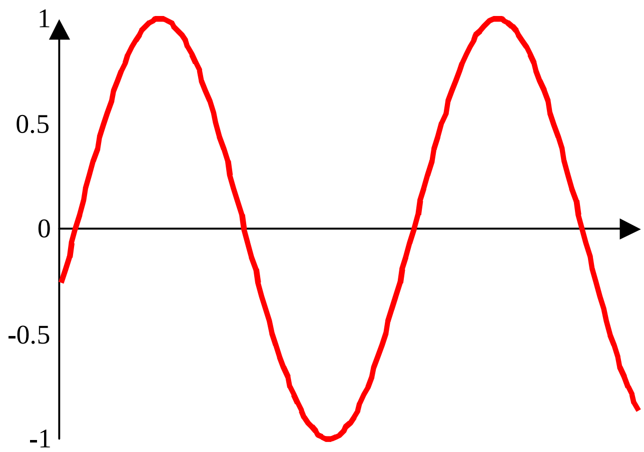
Observé en AC



Mesure de la valeur moyenne

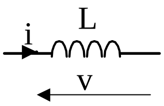
Voici deux tensions observées à l'oscilloscope en « DC ». Représenter ce qu'on observerait en « AC ». *(Réponse 3:)*





(6)Attention : la signification de **DC** et **AC** diffère pour un oscilloscope et pour un voltmètre ou un ampèremètre.

3.10 Inductance, condensateur et valeur moyenne.



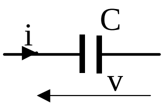
Pour une inductance : $v(t) = L.\dfrac{d\big(i(t)\big)}{dt}$.

Le calcul de $<V>$ donne le résultat suivant :

$$<V> = \frac{1}{T}\int_{to}^{to+T} L.\frac{d\big(i(t)\big)}{dt}\,dt = \frac{L}{T}.\Big[i(t)\Big]_{to}^{to+T} = \frac{L}{T}.\big[i(to+T) - i(to)\big]$$

En régime périodique : $i(to+T) = i(to) \Rightarrow <V> = 0$

La valeur moyenne de la tension aux bornes d'une inductance est nulle



Pour un condensateur : $i(t) = C.\dfrac{d\big(v(t)\big)}{dt}$.

Le calcul de $<I>$ donne le résultat suivant :

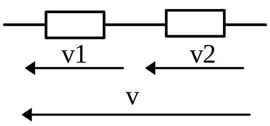
$$<I> = \frac{1}{T}\int_{to}^{to+T} C.\frac{d\big(v(t)\big)}{dt}\,dt = \frac{C}{T}.\Big[v(t)\Big]_{to}^{to+T} = \frac{C}{T}.\big[v(to+T) - v(to)\big]$$

En régime périodique : $v(to+T) = v(to) \Rightarrow <I> = 0$

La valeur moyenne du courant dans un condensateur est nulle

3.11 Valeur moyenne d'une somme de fonctions de même période.

Lors de l'utilisation de la loi des mailles ou de la loi des nœuds, on fait appel à des sommes ou des différences. La valeur moyenne d'une somme est-elle la somme des valeurs moyennes ?



$v(t) = v_1(t) + v_2(t)$

$$\Rightarrow <V> = \frac{1}{T}\int_{to}^{to+T} v(t).dt = \frac{1}{T}\int_{to}^{to+T} \big(v_1(t) + v_2(t)\big).dt$$

$$\Rightarrow <V> = \frac{1}{T}\int_{to}^{to+T} v_1(t).dt + \frac{1}{T}\int_{to}^{to+T} v_2(t).dt = <V_1> + <V_2>$$

Donc: La valeur moyenne d'une somme de fonctions de même période est la somme des valeurs moyennes.

Les trois résultats établis sur cette page sont à connaître par cœur.

4 EXERCICES SUR LES VALEURS MOYENNES DES SIGNAUX PERIODIQUES

Chap 9. Exercice 1 : Valeur moyenne d'une somme.

Estimer puis déterminer exactement la valeur moyenne des trois fonctions périodiques suivantes.

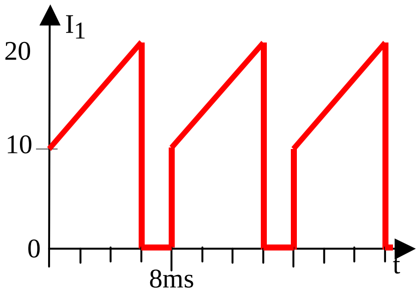


fig 1

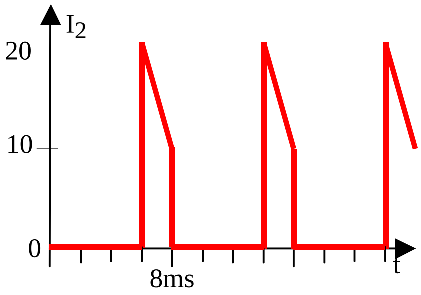


fig 2

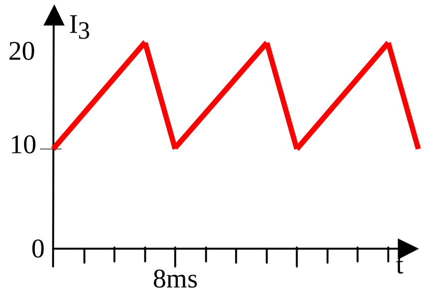
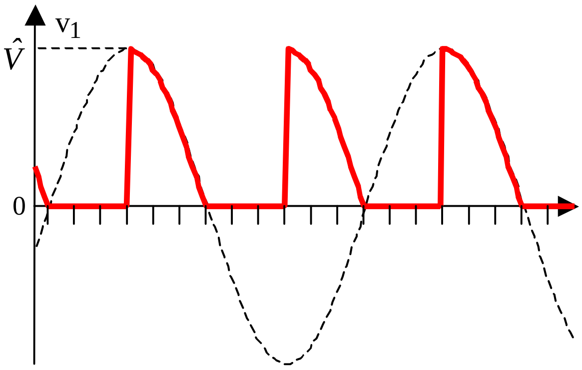
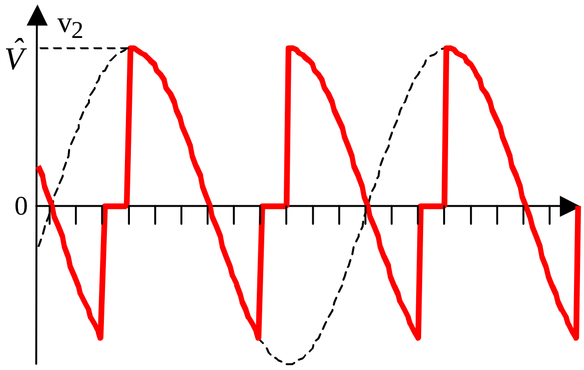


fig 3

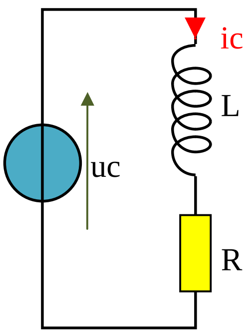
Chap 9. Exercice 2 : Valeur moyenne de morceaux de sinusoïde.

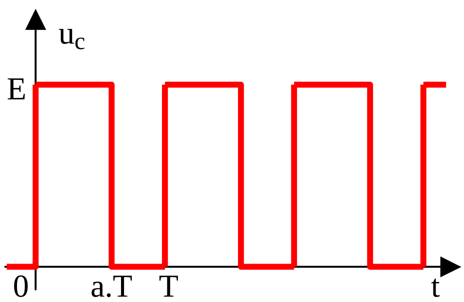
Les tensions périodiques suivantes peuvent être observées dans certains montages en électronique de puissance : les ponts redresseurs à thyristors.
Estimer (en hachurant des aires) puis calculer leur valeur moyenne.





Chap 9. Exercice 3 : Charge inductive d'un hacheur série en régime périodique.





Un hacheur série applique à une résistance R en série avec une inductance L, la tension carrée $u_C(t)$ d'amplitude « E » et de rapport cyclique « a ».

Le rapport cyclique est défini par :

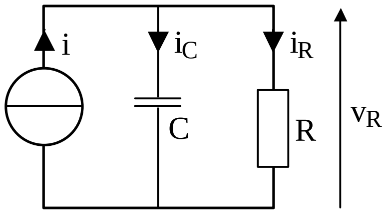
$$a = \frac{\text{temps de niveau haut}}{\text{période T}}$$

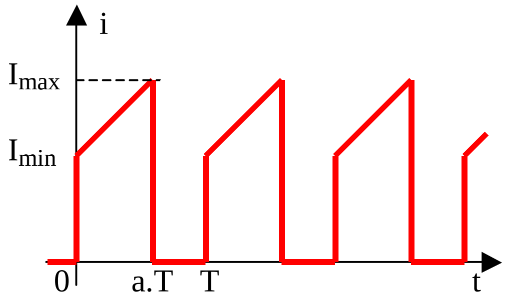
La tension périodique $u_C(t)$ engendre un courant $i_C(t)$ de même période.

Exprimer $< U_C >$ en fonction de E et a.
En déduire $< I_C >$ en fonction des éléments du montage.

Chap 9. Exercice 4 : Charge capacitive d'une alimentation à découpage.

Une alimentation à découpage applique le courant « $i(t)$ » ci-dessous à une résistance R en parallèle avec un condensateur C.
En régime périodique, les courants $i(t)$, $i_C(t)$ et $i_R(t)$ ont une même période..



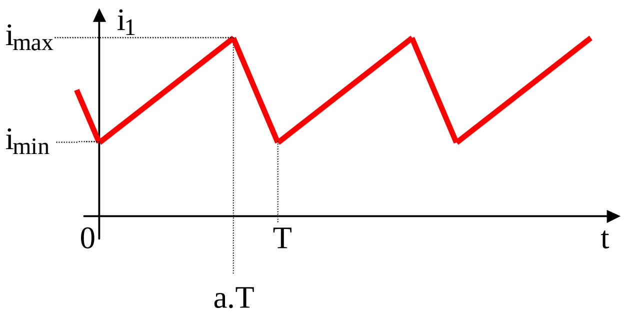


Exprimer $< I >$, $< I_C >$ et $< I_R >$ en fonction de I_{min}, I_{max} et a.
En déduire $< V_R >$ en fonction des éléments du montage.

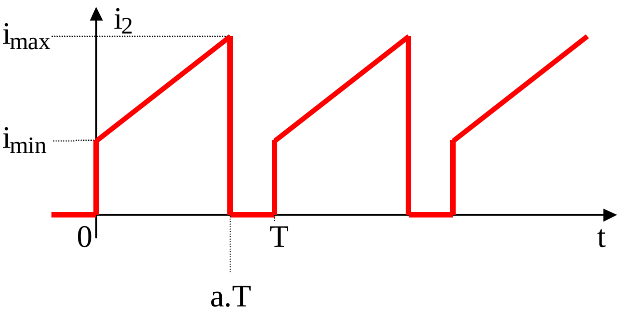
5 Ce que j'ai retenu de ce chapitre.

L'objectif de ce questionnaire est d'aider l'étudiant à évaluer lui-même sa connaissance du cours. Il est conseillé de répondre sur une feuille de papier et de ne pas se contenter du sentiment d'avoir « entendu parler ».

a)



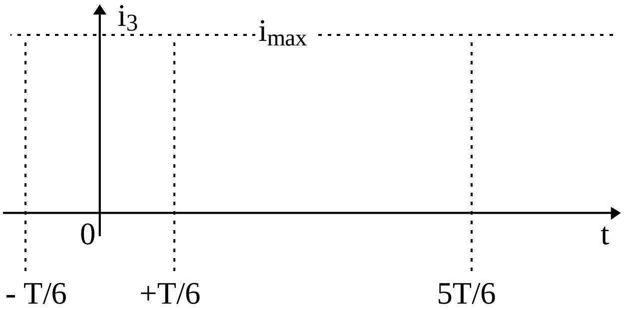
Estimer graphiquement la valeur moyenne de $i_1(t)$ en hachurant les surfaces appropriées. (Sans calcul) *(0)* b)



Calculer la valeur moyenne de $i_2(t)$ sans utiliser la notion d'intégrale. *(0)*

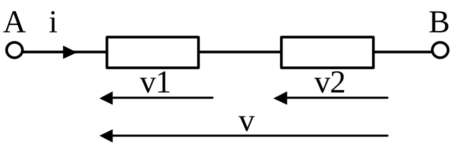
c)

Soit une fonction $i_3(t)$ périodique de période T, telle que $i_3(t) = I_{max}.cos\left(\frac{2\pi}{T}.t\right)$ sur l'intervalle $\left[-\frac{T}{6},+\frac{T}{6}\right]$ et nulle sur l'intervalle $\left[+\frac{T}{6},+\frac{5T}{6}\right]$.



Représenter ci-contre, le graphe de i_3(t). Calculer la valeur moyenne de i_3(t). *(Réponse 6:)*

d)



Soit le montage ci-contre associant en série deux dipôles quelconques, avec $v_1(t)$, $v_2(t)$ et $i(t)$ de même période.

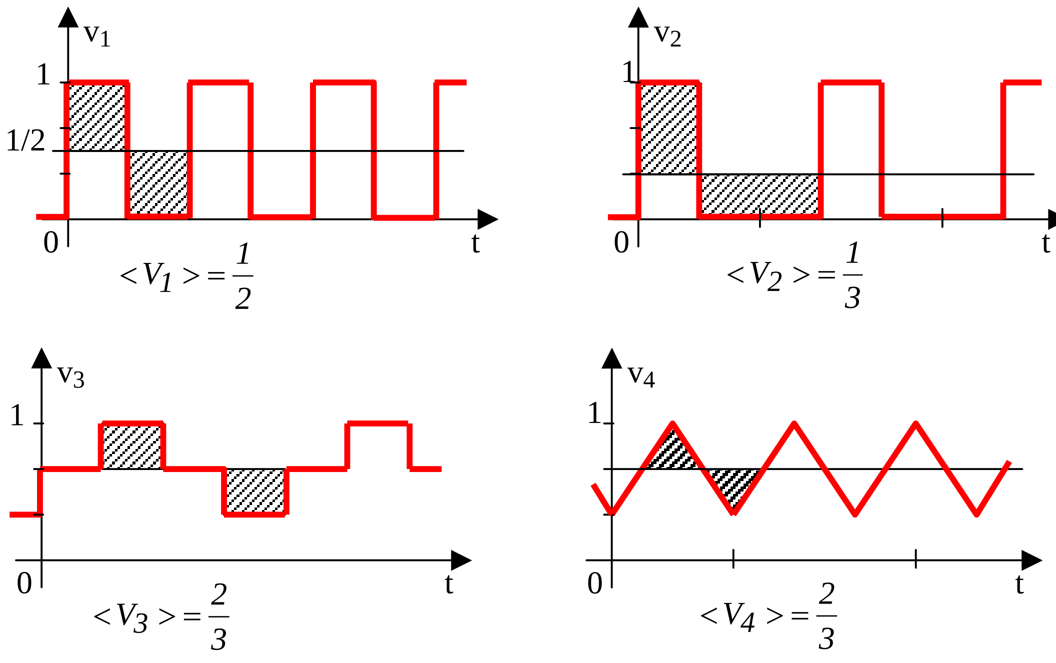
Est-ce que, dans tous les cas, $<V> = <V_1> + <V_2>$?

e) En régime périodique, que peut-on dire de la tension moyenne ou du courant moyen dans une inductance ou un condensateur ?

Des tests interactifs sont disponibles sur le site iutenligne. Dans l'onglet « ressources », indiquer « 1403 » ou sur le site miel GEII/Electricité/ Circuits et composants linéaires en alternatif

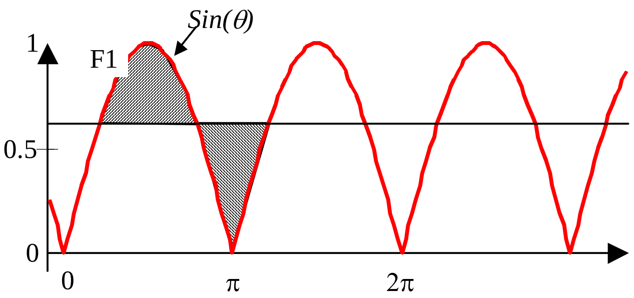
6 Reponses aux questions du cours

Réponse 1:



Sur la figure 1 : Sur un intervalle d'une période, nous avons hachuré les aires **entre la fonction et la droite représentant la valeur moyenne**.
Nous avons constaté intuitivement que l'aire hachurée « au-dessus » de la valeur moyenne est égale à l'aire hachurée au-dessous.
Retour

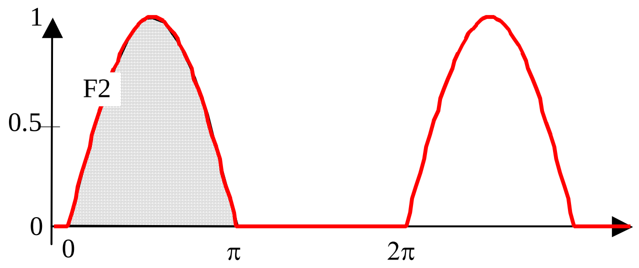
Réponse 2:



Graphiquement, par la *première méthode* (« aire au-dessus » = « aire au-dessous ») : $< F_1 > \approx \frac{2}{3}$

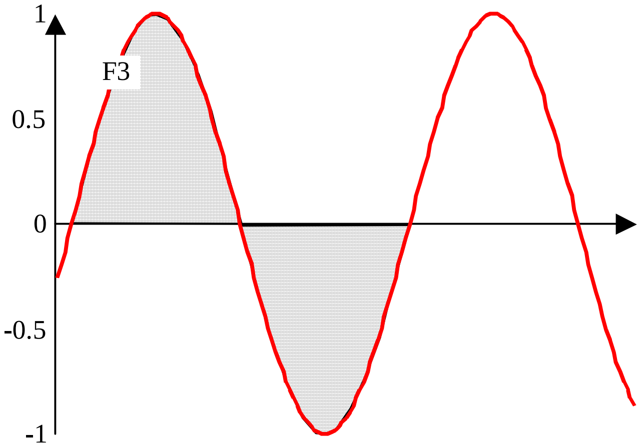
Par la *troisième méthode* (calcul intégral) :

$$< F_1 > = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} sin(\theta).d\theta = \frac{1}{\pi}.[-cos(\theta)]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

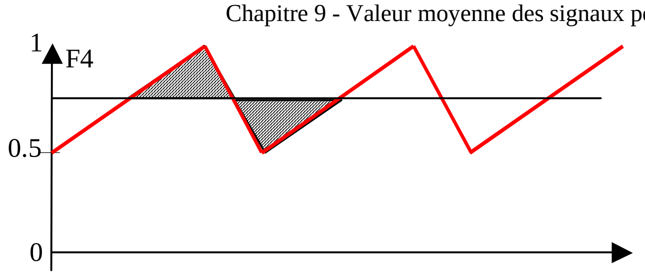


Par la *seconde méthode* (« aire sous la courbe sur un intervalle d'une période »), si on compare F1 et F2, on voit que pour une même période « 2π », l'aire sous la courbe F2 est deux fois plus faible que l'aire sous la courbe F1.

Donc $< F_2 > = \frac{< F_1 >}{2} = \frac{1}{\pi}$



Il est évident que $< F_3 > = 0$

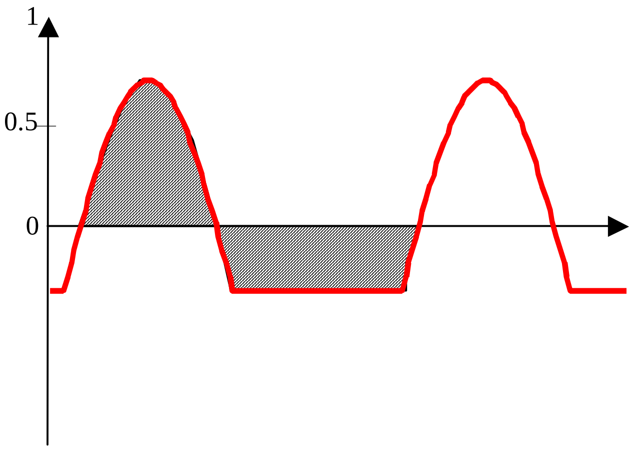


Par la *première méthode* (« aire au-dessus » = « aire au-dessous »), il est évident que $< F_4 > = 0{,}75$.

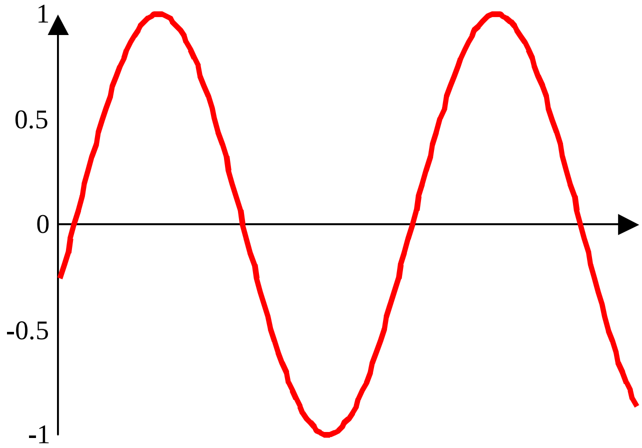
En effet, les aires des triangles « au-dessus » et « au-dessous » ne peuvent être égales que si la valeur moyenne est située à égale distance de « 0,5 » et de « 1 ».

Retour

Réponse 3:



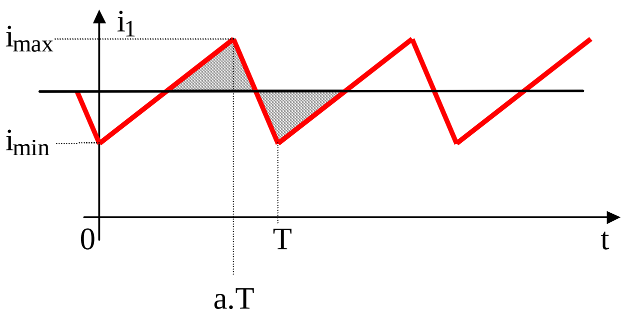
En « AC », l'oscilloscope visualise la composante alternative



La valeur moyenne (ou composante continue) d'une sinusoïde est nulle. Le graphe est le même en « DC » ou en « AC »

Retour

Réponse 4:



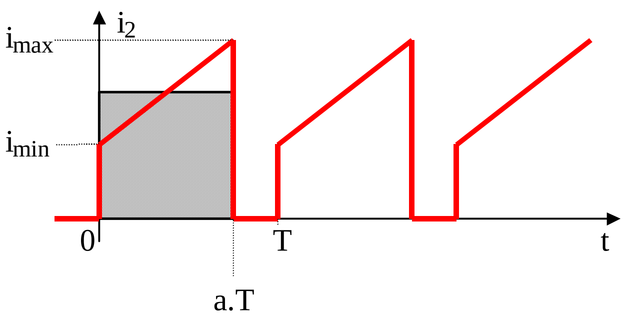
Par la *première méthode* (« aire au-dessus » = « aire au-dessous ») :

$$I_{1moy} = \frac{i_{max} + i_{min}}{2}$$

Pour que les deux triangles soient égaux, la valeur moyenne doit être à égale distance de i_{min} et i_{max}. Il n'est donc pas nécessaire de faire le moindre calcul !

Retour

Réponse 5:



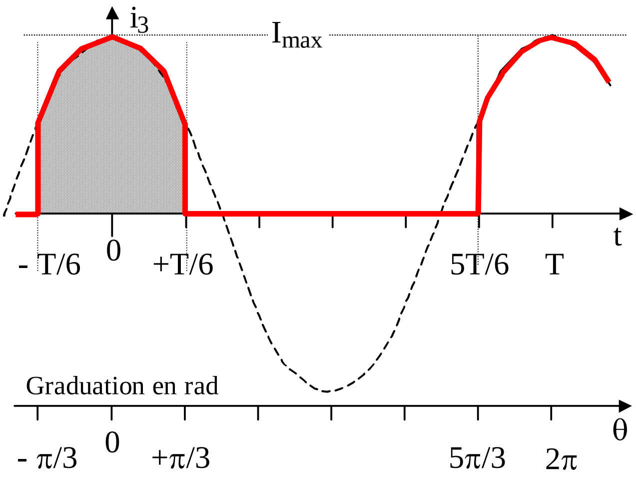
Par la *seconde méthode* (« aire sous la courbe sur un intervalle d'une période ») :

$$< I_2 > = \frac{\left(\frac{i_{max} + i_{min}}{2}\right).a.T}{T} = \left(\frac{i_{max} + i_{min}}{2}\right).a$$

Un raisonnement sur l'aire d'un trapèze ou sur l'aire du rectangle hachuré suffit.

[Retour]

Réponse 6:



Par la *troisième méthode* (calcul de l'aire sous la courbe sur un intervalle d'une période au moyen d'une intégral) :

Avec une graduation en temps :

$$< I_3 > = \frac{1}{T} \int_{-T/6}^{+T/6} I_{max}.cos\left(\frac{2\pi}{T}.t\right).dt$$

ou:

Avec une graduation en radian :

$$< I_3 > = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/3}^{+\pi/3} I_{max}.cos(\theta).d\theta = \frac{I_{max}}{2\pi}.2.sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$< I_3 > = \frac{I_{max}.\sqrt{3}}{2\pi}$$

[Retour]