ELECTRICITE

Analyse des signaux et des circuits électriques

Michel Piou

Chapitre 7

Théorèmes de superposition, Thévenin et Norton appliqués à un réseau électrique linéaire en alternatif sinusoïdal.

Edition 11/03/2014

Table des matières

Temps de travail estimé pour un apprentissage de ce chapitre en autonomie : 7 heures

THEOREMES DE SUPERPOSITION, THEVENIN ET NORTON APPLIQUES A UN RESEAU ELECTRIQUE LINEAIRE

1 POURQUOI ET COMMENT ?

Prérequis :
Tous les chapitres 1 à 6.
La notion de somme de complexes et de produit de complexes.
Le calcul des fractions.

Objectifs :
Réseaux linéaires en alternatif sinusoïdal. L'objectif est de compléter les **outils de calcul des circuits** pour l'électricien et l'électronicien.
L'électricien utilisera ces outils pour calculer les réseaux de distribution d'énergie électrique.
L'électronicien en fera un de ses outils de base pour le calcul de nombreux montages tels que les amplificateurs ou les filtres.

Méthode de travail :
Ce chapitre fera largement appel au calcul, et en particulier au calcul en complexe.
Pour éviter les erreurs de calcul littéral, il faut vérifier l'homogénéité des formules : on peut s'assurer que les deux côtés d'une égalité s'expriment bien avec la même unité ou qu'on n'additionne pas des termes de nature différente (Par exemple : on n'additionne pas des volts et des ohms).
Pour limiter les erreurs de calcul numérique, on peut vérifier l'ordre de grandeur du résultat.

Dans ce chapitre, l'utilisation de schémas sera un aspect important. Pour bien les « voir », il est vivement conseillé de faire des **schémas propres, assez grands et en couleur** ! Il faut se convaincre que l'absence de schéma ou la réalisation d'un schéma tout gris et rabougri est source de perte de temps et d'erreurs.

Travail en autonomie :
Pour permettre une étude du cours de façon autonome, les réponses aux questions du cours sont données en fin de document.

Corrigés en ligne :
Pour permettre une vérification autonome des exercices, consulter « Baselecpro »
(chercher « baselecpro accueil » sur Internet avec un moteur de recherche)

2 THEOREMES FONDAMENTAUX DES RESEAUX LINEAIRES

2.1 Définitions

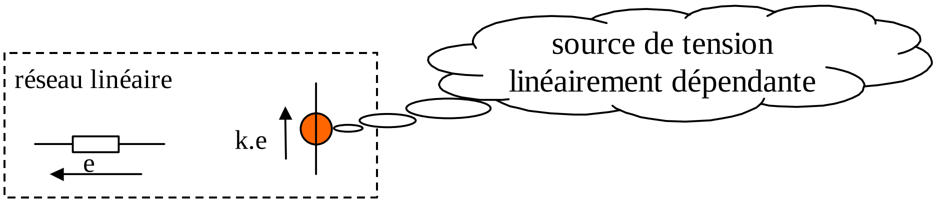
Un réseau électrique est dit « **linéaire** » s'il est constitué uniquement de dipôles passifs linéaires, de sources idéales de tension (ou de courants) indépendantes ou linéairement dépendantes (1).

- Les **dipôles passifs linéaires** ont déjà été vus. Pour l'essentiel, ils sont constitués de résistances, d'inductances et de condensateurs.

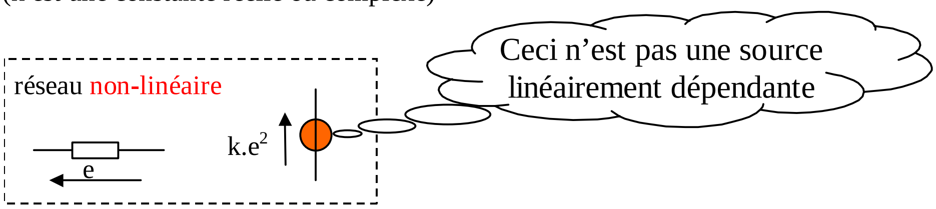
- Les **sources de tension idéales** ont une résistance (ou une impédance) interne nulle.

Une source de tension idéale est dite « **indépendante** » si la valeur de sa tension ne dépend pas du circuit auquel elle est reliée.

Une source de tension idéale est dite « **linéairement dépendante** » si la valeur de sa f.e.m. est proportionnelle à un des courants ou une des tensions du réseau considéré :



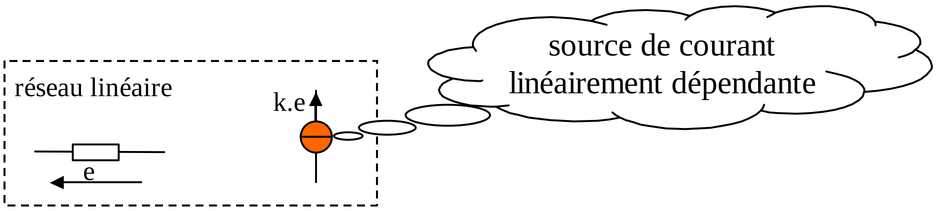
(k est une constante réelle ou complexe)



- Les **sources de courant idéales** ont une résistance interne infinie.

Une source de courant idéale est dite « **indépendante** » si la valeur de son courant ne dépend pas du circuit auquel elle est reliée.

Une source de courant idéale est dite « **linéairement dépendante** » si la valeur de son courant est proportionnelle à un des courants ou une des tensions du réseau considéré.



(k est une constante réelle ou complexe)

(1) A cela, nous ajouterons plus tard les « multipôles linéaires » par exemple les transformateurs en régime linéaire.

2.2 Théorème de superposition

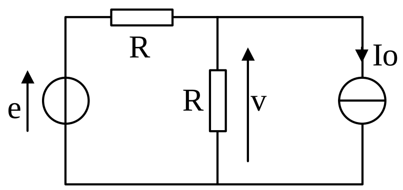
Sans démonstration

Dans un **réseau électrique linéaire**, le courant (ou la tension) dans une branche quelconque est égal **la somme algébrique** des courants (ou des tensions) obtenus dans cette branche sous l'effet de chacune des **sources indépendantes** prise isolément, toutes les autres sources indépendantes ayant été remplacées par leur **impédance interne**.

L'énoncé de ce théorème est à connaître par cœur, même si, dans un premier temps, on ne le comprend pas très bien.

Bien que le théorème de superposition ne se limite pas au régime continu ou alternatif sinusoïdal, nous ne traiterons ici que des exemples avec des générateurs continus et/ou alternatifs sinusoïdaux.

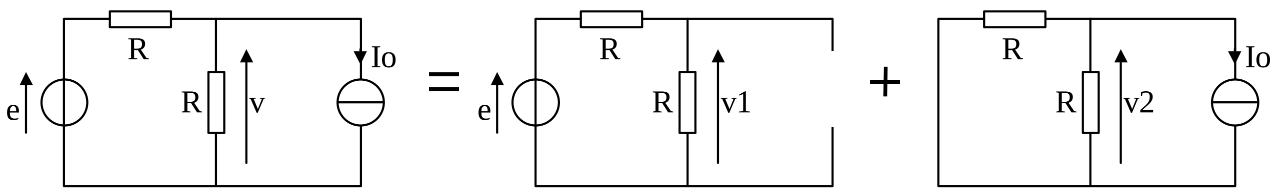
Exemple N°1



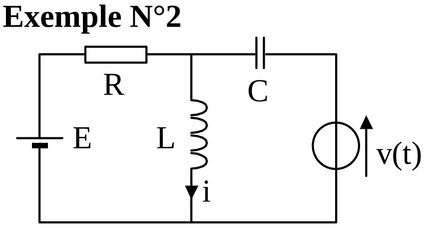
e(t) = 10.cos(ω.t) ; Io = 2 A ; R = 5 Ω.

Calculer v(t) par le théorème de superposition.
Vérifier par la loi des mailles et des nœuds.
(Réponse 1:)

Méthode : Pour utiliser le théorème de superposition, il est utile de faire un schéma pour chaque source indépendante :

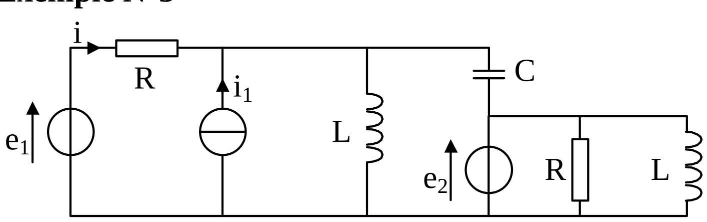


Exemple N°2



$v(t) = \hat{V}.cos(\omega t)$; E = constante. Exprimer i(t) en régime périodique en fonction des éléments du montage sachant que $R = L.\omega = \dfrac{1}{C\omega}$.
(Réponse 2:)

Exemple N°3



Toutes les sources sont alternatives sinusoïdales de même fréquence.

A quelle condition le courant i est-il indépendant de e_1 ?
(Réponse 3:)

2.3 Théorème de Thévenin en régime alternatif sinusoïdal permanent.

Le théorème de Thévenin a déjà été énoncé en régime continu. On peut aussi l'énoncer en régime alternatif sinusoïdal quand toutes les sources indépendantes sont de même fréquence:

Sans démonstration

Tout **réseau électrique linéaire** en régime **alternatif sinusoïdal**, vu entre deux bornes AB peut être remplacé par un circuit équivalent constitué d'une source de tension indépendante $\underline{E}_{eq}$ en série avec une impédance $\underline{Z}_{eq}$.

$\underline{E}_{eq}$ est la tension complexe vue entre les deux bornes A et B lorsque le dipôle est **à vide**.

$\underline{Z}_{eq}$ est l'impédance vue entre les deux bornes du dipôle AB lorsque toutes les sources **indépendantes** sont remplacées par leur impédance interne.

2.4 Théorème de Norton en régime alternatif sinusoïdal permanent.

Le théorème de Norton a déjà été énoncé en régime continu. On peut aussi l'énoncer en régime alternatif sinusoïdal quand toutes les sources indépendantes sont de même fréquence:

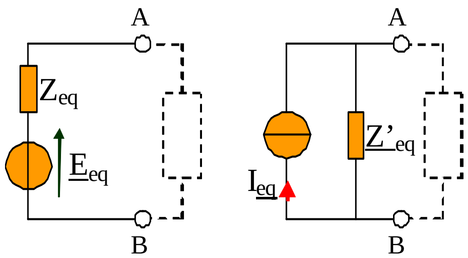
Sans démonstration

Tout réseau électrique **linéaire** en régime **alternatif sinusoïdal**, vu entre deux bornes AB peut être remplacé par un circuit équivalent constitué d'une source de courant indépendante $\underline{I}_{eq}$ en parallèle avec une impédance $\underline{Z}_{eq}$.

$\underline{I}_{eq}$ ou $\underline{I}_{cc}$ est le courant complexe de **court-circuit** entre les deux bornes A et B.

$\underline{Z}_{eq}$ est l'impédance vue entre les deux bornes du dipôle AB lorsque toutes les sources **indépendantes** sont remplacées par leur impédance interne.

Rappel sur la dualité série/parallèle



Vis à vis du reste du montage, les deux dipôles AB sont équivalents si :

$$\boxed{\underline{E}_{eq} = \underline{Z}_{eq}.\underline{I}_{eq} \text{ et } \underline{Z}_{eq} = \underline{Z'}_{eq}}$$

$\underline{E}_{eq}$: tension équivalente de Thévenin
ou tension à vide du dipôle.

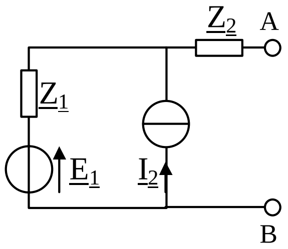
$\underline{Z}_{eq}$: impédance équivalente de Thévenin
ou impédance équivalente de Norton
ou impédance interne du dipôle.

$\underline{I}_{eq}$: courant équivalent de Norton
ou courant de court-circuit du dipôle.

L'énoncé de ces théorèmes est à connaître par cœur, même si, dans un premier temps, on ne les comprend pas très bien.

3 EXEMPLES D'APPLICATION DES THEOREMES:

Exemple N°1 (régime alternatif sinusoïdal)



$e_1(t)$ et $i_2(t)$ sont alternatifs sinusoïdaux de même fréquence.

On veut déterminer un schéma équivalent au dipôle AB.

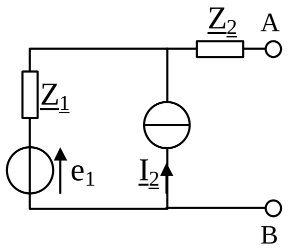
1° solution: Calculer $\underline{I}_{eq}$ (à l'aide du théorème de superposition) et $\underline{Z}_{eq}$. En déduire $\underline{E}_{eq}$.

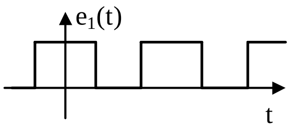
2° solution: Convertir le dipôle $\underline{E}_1$, $\underline{Z}_1$ en son équivalent de Norton, puis convertir l'ensemble du dipôle AB en son équivalent de Thévenin. En déduire $\underline{E}_{eq}$.

3° solution: En partant de sa définition, calculer directement $\underline{E}_{eq}$.

(Réponse 4:)

Exemple N°2



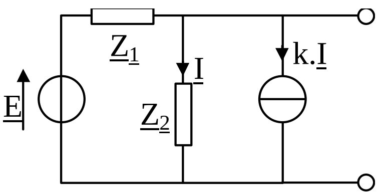


i2(t) est une fonction alternative sinusoïdale

On veut déterminer un schéma équivalent au dipôle AB. Qu'en pensez-vous ?

(Réponse 5:)

Exemple N°3 (régime alternatif sinusoïdal)

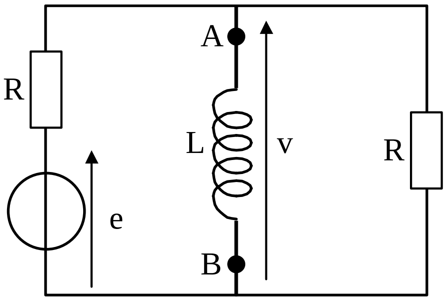


Sachant que *k* est une constante réelle différente de –1, déterminer le schéma équivalent de Thévenin de ce dipôle.

(Réponse 6:)

4 PROBLEMES ET EXERCICES.

Chap 7. Exercice 1 : Théorème de Thévenin 1.

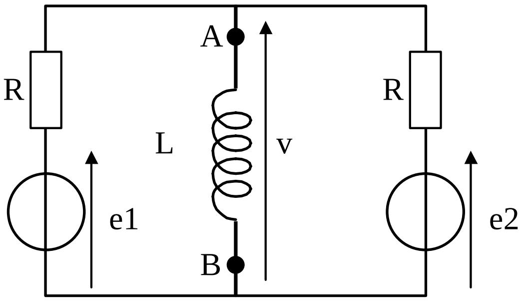


$R = 2.L\omega = 100\ \Omega$.

$e(t) = 100.\cos(\omega t)$

Calculer v(t) en régime permanent ([2]) en utilisant le modèle équivalent de Thévenin du dipôle AB

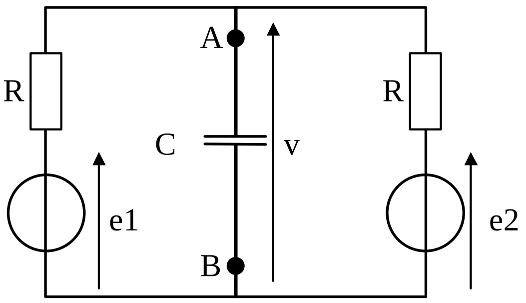
Chap 7. Exercice 2 : Superposition 1



Sachant que $e1(t) = 5.\cos(\omega.t)$, $e2(t) = 5.\sin(\omega.t)$ et que $R = L.\omega = 100\ \Omega$, déterminer v (t) en régime permanent en appliquant le théorème de superposition.

Reprendre le même calcul en utilisant le modèle équivalent de Norton du dipôle AB.

Chap 7. Exercice 3 : Superposition 2



Sachant que $e1(t) = 5.\cos(\omega.t)$, $e2(t) = \text{constante} = 10V$ et que $R = \dfrac{1}{C.\omega} = 100\Omega$,

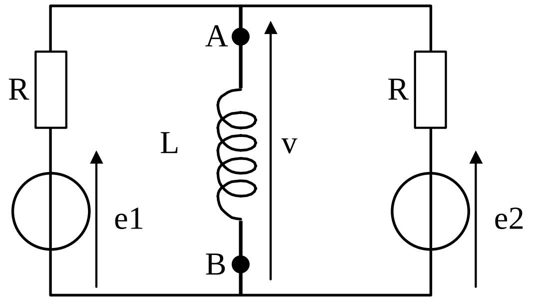
déterminer v (t) en régime permanent.

Représenter le graphe de v(t).

Remarque : L'association d'une source continue (l'alimentation en énergie) et d'une source alternative (le signal véhiculant l'information) est une situation fréquente en électronique. Le théorème de superposition est alors un outil précieux.

([2]) Nous n'étudions pas les signaux à la mise sous tension du montage, mais uniquement lorsque le régime alternatif sinusoïdal est stabilisé.

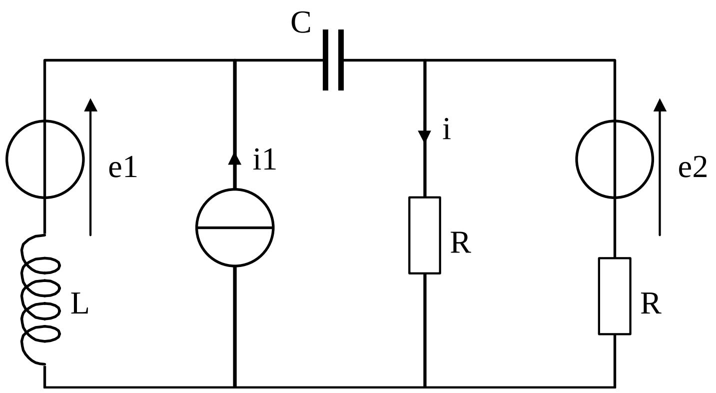
Chap 7. Exercice 4 : Superposition 3



Sachant que $e1(t) = 5.cos(\omega.t)$, $e2(t) =$ constante $= 10V$ et que $R = L.\omega = 100\ \Omega$, déterminer v (t) en régime permanent.

Représenter le graphe de v(t).

Chap 7. Exercice 5 : Théorème de Thévenin 2.



Sachant que:
$e1(t) = 100.sin(\omega.t)$

$e2(t) = 200.cos(\omega.t - \frac{\pi}{4})$

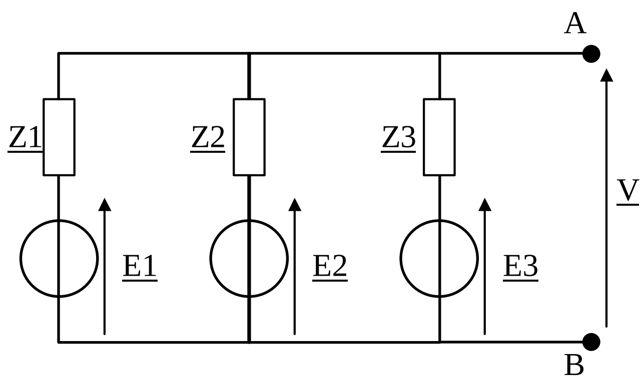
$i1(t) = 2.cos(\omega.t)$

$R = 1000\ \Omega$

et $L.\omega = \frac{1}{C.\omega} = 100\ \Omega$

en déduire i(t) en régime permanent en utilisant le théorème de Thévenin.

Chap 7. Exercice 6 : Théorème de Millman.



Calculer le courant de court-circuit complexe Icc et l'impédance équivalente Zeq du dipôle AB.
En déduire la tension équivalente de Thévenin Eeq du dipôle AB.
Cette démarche avec ce type de dipôle est appelée « théorème de Millman ».

Sachant que:
$e1(t) = 5.cos(\omega.t)$, $\underline{Z1} = 10$

$e2(t) = 5.sin(\omega.t)$, $\underline{Z2} = 10.e^{-j\frac{\pi}{2}}$

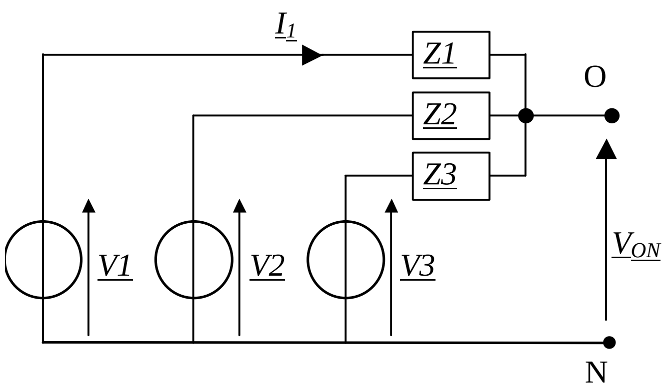
$e3(t) = -5.sin(\omega.t)$, $\underline{Z3} = 10.e^{j\frac{\pi}{2}}$

Calculer v(t).

Remarque : Cette démarche dite « Théorème de Millman » sera d'une grande utilité en électronique pour l'étude des montages amplificateurs.

Chap 7. Exercice 7 : Montage étoile déséquilibré en régime alternatif sinusoïdal triphasé.

(On retrouvera ce type de schéma dans le cours sur les lignes triphasées en électrotechnique)



1) Enoncer le théorème de Norton en régime alternatif sinusoïdal.

2) Exprimer Ieq et Zeq du schéma équivalent de Norton du dipôle NO ci-contre.

3) En déduire les éléments du schéma équivalent de Thévenin du dipôle NO.

4) Comment s'appelle ce type de démarche associée à ce type de dipôle ?

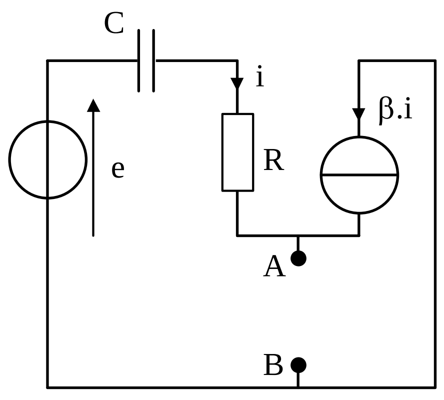
5) Application numérique:

$v1(t) = 230\sqrt{2}.cos(\omega.t)$ $\qquad \underline{Z1} = 23.e^{j\,0}$ $\qquad$ Calculer $v_{ON}(t)$ et $i_1(t)$.

$v2(t) = 230\sqrt{2}.cos(\omega.t - \frac{2\pi}{3})$ $\qquad \underline{Z2} = 23.e^{-j\,\pi/3}$

$v3(t) = 230\sqrt{2}.cos(\omega.t - \frac{4\pi}{3})$ $\qquad \underline{Z3} = 23.e^{+j\,\pi/3}$

Chap 7. Exercice 8 : Circuit avec source linéairement dépendante.



E(t) est une source de tension alternative sinusoïdale d'amplitude $\hat{E}$ et de pulsation ω qui sera prise comme référence (origine des phases).

Sachant que β est un coefficient positif constant :

1) Calculer l'impédance équivalente de Thévenin du dipôle AB en fonction des éléments du montage.

2) Calculer le courant complexe équivalent de Norton du dipôle AB.

3) En déduire la tension complexe équivalente de Thévenin du dipôle AB.

4) Calculer directement la tension complexe équivalente de Thévenin du dipôle AB.

5 Ce que j'ai retenu du chapitre « Theoremes de Thevenin, Norton et superposition avec des reseaux electriques lineaires ».

1) Ecrire le théorème de superposition. *(Le théorème doit être énoncé sans oublier un seul des mots mis en gras dans le texte du cours) (il est conseillé d'illustrer celui-ci par un petit exemple).* Ce théorème s'applique-t-il uniquement pour des sources continues ou uniquement pour des sources alternatives sinusoïdales ?

2) Ecrire, pour le régime alternatif sinusoïdal, la définition de la tension équivalente de Thévenin, de l'impédance équivalente et du courant équivalent de Norton. Quelle relation existe-t-il entre ces trois grandeurs ?

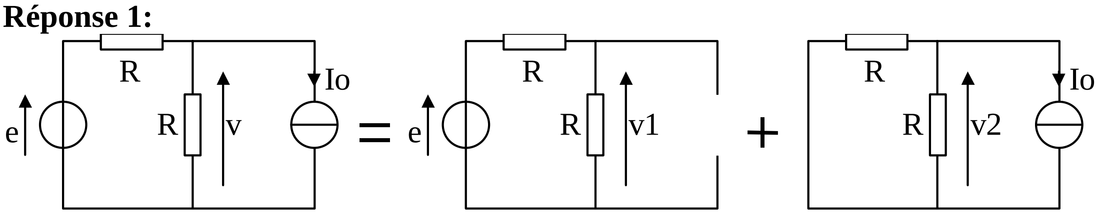
3) Avec quel type de dipôle utilise-t-on le théorème de Millman ? En quoi consiste ce théorème ? (se reporter éventuellement à l'exercice Chap 7. Exercice 6 :).

Des tests interactifs sont disponibles sur le site iutenligne. Dans l'onglet « ressources », indiquer « 1378 » ou « 1361 » ou « 1391 »

ou sur le site miel GEII/Electricité/ Circuits et composants linéaires en alternatif

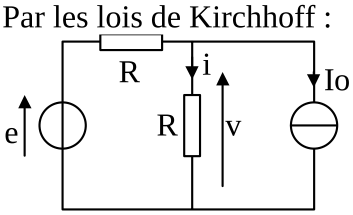
6 Reponses aux questions du cours

Réponse 1:



$$v_1(t) = \frac{e(t)}{2} \qquad v_2(t) = -\frac{R}{2}.Io \qquad \Rightarrow v(t) = 5.\cos(\omega.t) - 5$$

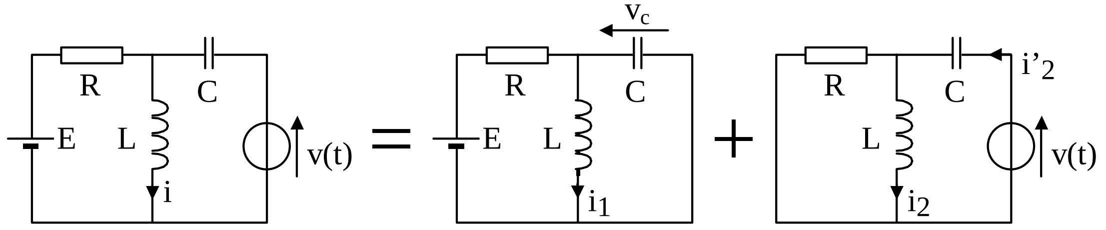
Par les lois de Kirchhoff :



$$\left.\begin{aligned} & e(t) = R.i(t) + R.(i(t) + Io) \\ & v(t) = R.i(t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow i(t) = \frac{e(t) - R.Io}{2.R} \Rightarrow v(t) = \frac{e(t) - R.Io}{2} = 5.\cos(\omega.t) - 5\,.$$

Retour

Réponse 2:



En régime continu : $\frac{di_1}{dt} = 0$: L'inductance se comporte donc comme un court-circuit. $\frac{dv_C}{dt} = 0$: Le condensateur se comporte donc comme un circuit ouvert. $\Rightarrow i_1 = \frac{E}{R}$

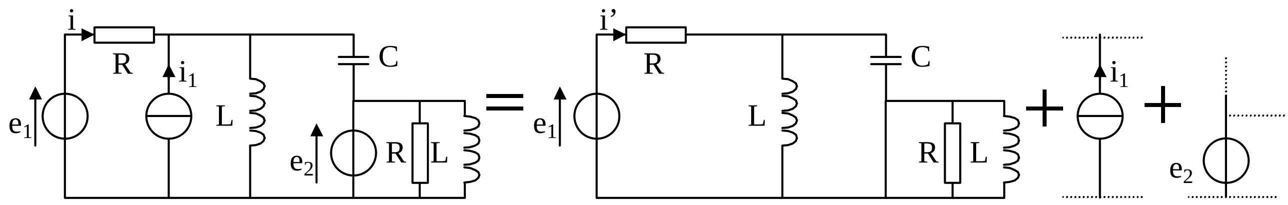
En régime alternatif sinusoïdal, on utilise les complexe et le pont diviseur de courant.

$$\Rightarrow \underline{I'_2} = \frac{\hat{V}.e^{j0}}{\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega}\right)^{-1} - \frac{j}{C\omega}} \Rightarrow \underline{I_2} = \frac{\hat{V}.e^{j0}}{\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega}\right)^{-1} - \frac{j}{C\omega}} \cdot \frac{R}{R + jL\omega} = \frac{\hat{V}.e^{j0}}{\frac{jR^2}{R + jR} - jR} \cdot \frac{R}{R + jR}$$

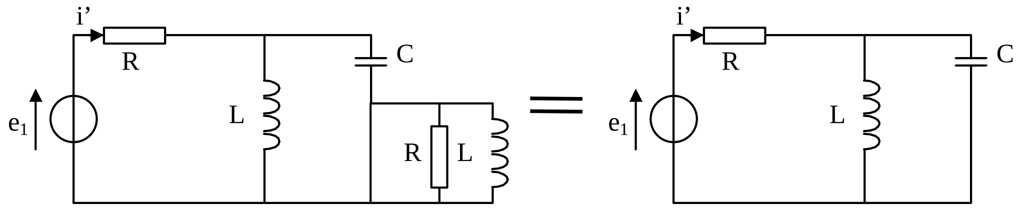
$$\Rightarrow \underline{I_2} = \frac{\hat{V}.e^{j0}}{R.(j - j + 1)} = \frac{\hat{V}.e^{j0}}{R} \Rightarrow i_2(t) = \frac{\hat{V}}{R}.\cos(\omega.t) \Rightarrow i(t) = \frac{E}{R} + \frac{\hat{V}}{R}.\cos(\omega.t) \; .$$

Retour

Réponse 3:
Le montage comporte trois sources indépendantes, on peut lui appliquer le théorème de superposition :



i'(t) est la composante de i(t) engendrée par la source e_1(t) seule. Si i(t) ne dépend pas de e_1(t) , alors i'(t) = 0



$$\underline{I'} = \frac{\underline{E_1}}{R + \left(\frac{1}{jL\omega} + jC\omega\right)^{-1}} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{jL\omega} + jC\omega\right)^{-1} \text{ est } \infty \Leftrightarrow \frac{1}{jL\omega} + jC\omega = 0 \Leftrightarrow \frac{-j}{L\omega} + jC\omega = 0$$

$$\Leftrightarrow L.C.\omega^2 = 1$$

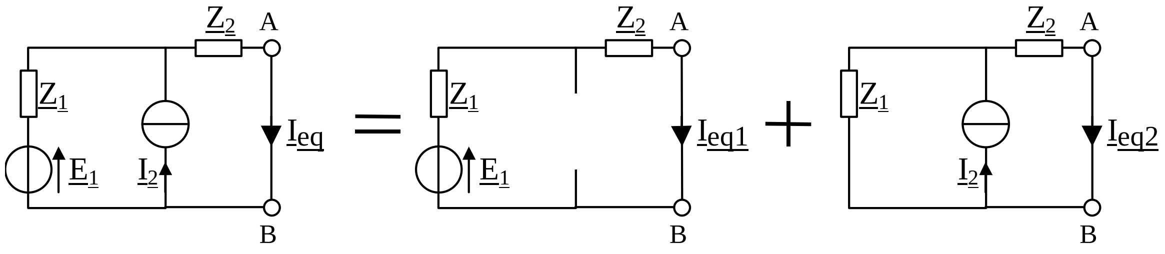
.

Retour

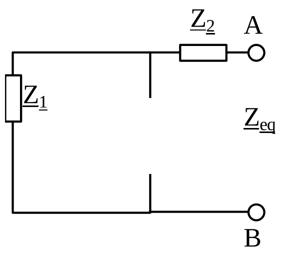
Réponse 4:

<u>1° solution</u>

Courant de court-circuit :



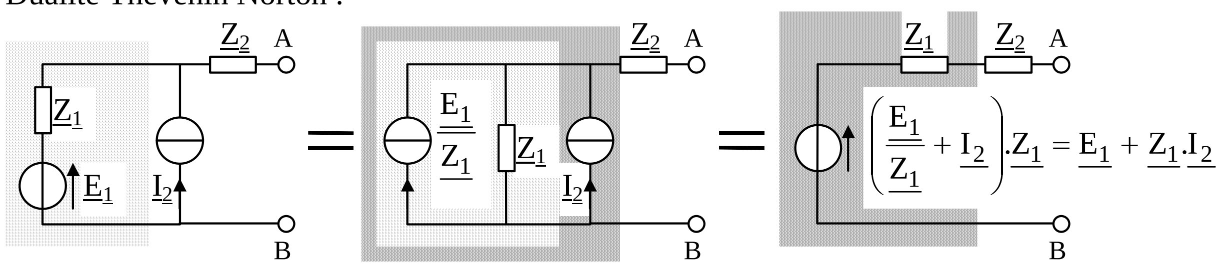
$$\underline{I}_{eq} = \underline{I}_{eq1} + \underline{I}_{eq2} = \frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} + \frac{\underline{I}_2.\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{\underline{E}_1 + \underline{I}_2.\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$



$$\underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \qquad \Rightarrow \underline{E}_{eq} = \underline{Z}_{eq}.\underline{I}_{eq} = \underline{E}_1 + \underline{I}_2.\underline{Z}_1$$

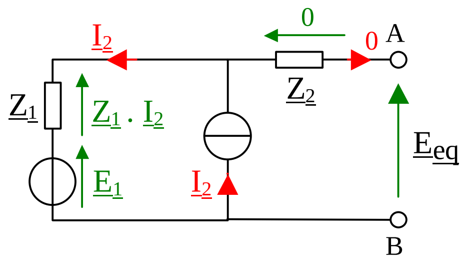
<u>2° solution</u>

Dualité Thévenin Norton :



<u>3° solution</u>

La tension équivalente de Thévenin est la tension aux bornes du dipôle lorsqu'il est à vide :



D'après la loi des nœuds et la loi des mailles :

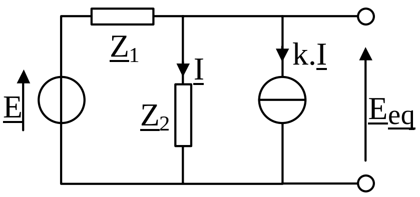
$$\Rightarrow \underline{E}_{eq} = \underline{E}_1 + \underline{Z}_1.\underline{I}_2$$

Conclusion : La première solution n'est pas forcément la meilleure. Il faut s'entraîner.

<u>Retour</u>

Réponse 5:
e1(t) n'est pas une fonction alternative sinusoïdale. La notion de complexe et donc d'impédance n'a pas de sens ici..
Attention ! *Le mélange de fonctions non sinusoïdales et de complexes est une erreur courante.*
Retour

Réponse 6:

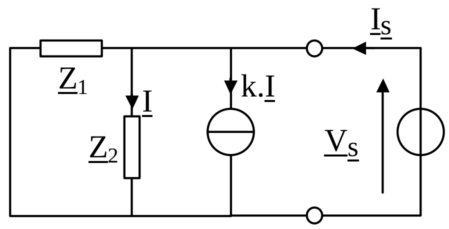


Attention ! Le montage comporte une source de courant linéairement dépendante. Il n'est donc pas possible de dissocier les deux sources pour appliquer le théorème de superposition.

$$\underline{E} = \underline{Z_1}.(1+k).\underline{I} + \underline{Z_2}.\underline{I} \quad \Leftrightarrow \underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z_1}.(1+k)+\underline{Z_2}}$$

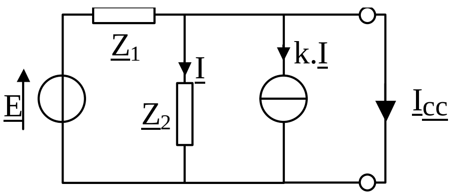
$$\Leftrightarrow \underline{E_{eq}} = \underline{Z_2}.\underline{I} = \frac{\underline{Z_2}.\underline{E}}{\underline{Z_1}.(1+k)+\underline{Z_2}}$$

Pour le calcul de $\underline{Z_{eq}}$, Il n'est pas possible de remplacer la source de courant linéairement dépendante par un circuit ouvert. On utilise donc le principe de l'ohmmètre qui consiste à appliquer une tension aux bornes et à faire le rapport $\dfrac{\underline{V_s}}{\underline{I_s}}$.



$$\underline{I} = \frac{\underline{V_s}}{\underline{Z_2}} \quad . \quad \underline{I_s} = \frac{\underline{V_s}}{\underline{Z_1}} + (1+k).\underline{I} = \frac{\underline{V_s}}{\underline{Z_1}} + (1+k).\frac{\underline{V_s}}{\underline{Z_2}}$$

$$\Rightarrow \underline{I_s} = \underline{V_s}.\left(\frac{1}{\underline{Z_1}} + \frac{(1+k)}{\underline{Z_2}}\right) \Rightarrow \underline{Z_{eq}} = \left(\frac{1}{\underline{Z_1}} + \frac{(1+k)}{\underline{Z_2}}\right)^{-1}$$



On peut également calculer le courant de court-circuit :

$$\underline{I_{cc}} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z_1}} \quad \Rightarrow \underline{Z_{eq}} = \frac{\underline{E_{eq}}}{\underline{I_{cc}}} = \frac{\underline{Z_2}.\underline{E}}{\underline{Z_1}.(1+k)+\underline{Z_2}} \cdot \frac{\underline{Z_1}}{\underline{E}}$$

$$\Rightarrow \underline{Z_{eq}} = \frac{\underline{Z_1}\,.\,\underline{Z_2}}{\underline{Z_1}.(1+k)+\underline{Z_2}} = \left(\frac{1}{\underline{Z_1}} + \frac{(1+k)}{\underline{Z_2}}\right)^{-1}$$

Ce type de problème avec des sources linéairement dépendantes sera souvent rencontré en électronique. Dans ce chapitre, on insistera peu sur ce genre de difficultés.
Mais il convient néanmoins d'être vigilant quand le circuit comporte des sources linéairement dépendantes.

Retour