





# Modulations d'ondes sinusoïdales – Démodulations

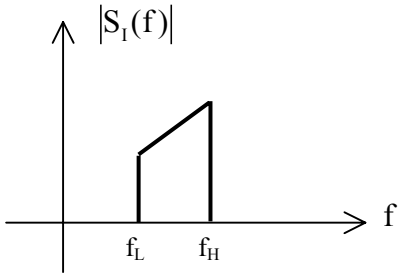
**Pierre Le Bars**
**(avec la collaboration de Francis Gary)**
lebars@moniut.univ-bpclermont.fr

# Modulations d'ondes sinusoïdales – Démodulations

## I/ Nécessité d'une modulation

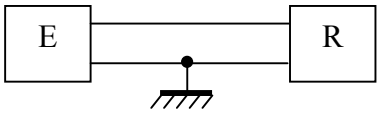
Le problème est le suivant : comment transmettre une information (signal $s_i(t)$ ) d'un point E (émetteur) vers un point R (récepteur) ? $s_i(t)$ peut être une information issue d'un capteur (microphone, résultat d'une mesure …) ou un signal traité (résultat d'un calcul, données informatiques …).

Cette information peut aussi être définie dans le domaine spectral, par $S_I(f)$. On suppose que le spectre est compris dans la bande $[f_L ; f_H]$.



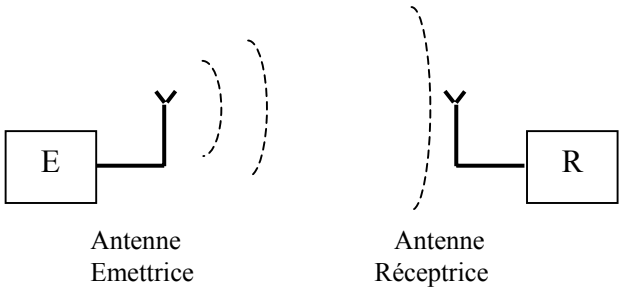

Il existe deux méthodes pour transmettre un signal :

- Liaison physique entre E et R par câble ou paire de fils ou fibre optique :




La transmission est dite « en bande de base » si le signal $s_i(t)$ est transmis sans modification, en particulier de son spectre

- Liaison hertzienne



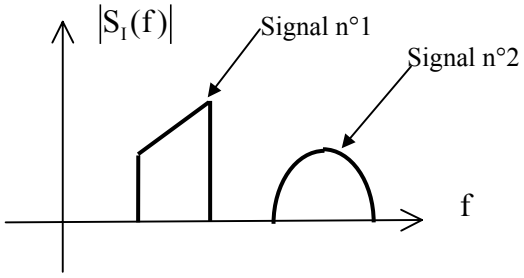

Avantages et inconvénients :

1. « Bande de base »

- Il y a une liaison physique entre l'émetteur et le récepteur, d'où des problèmes sur de grandes distances (on peut imaginer un avion avec sa liaison à la tour de contrôle ….)

- Pour transmettre deux informations $s_{i1}$ et $s_{i2}$ il faut :

  - soit que les deux spectres ne se recouvrent pas




  - soit une liaison par signal

Ce type de transmission est utilisée sur de courtes distances (liaisons informatiques par exemple)

2. liaison hertzienne

- la longueur de l'antenne est de l'ordre de la longueur d'onde $\lambda$
  ($\lambda = \frac{c}{f}$ avec $c = 3.10^8$ m/s et longueur de l'antenne = $\frac{\lambda}{4}$).
  Exemple : soit un signal à 1 kHz : la longueur de l'antenne doit être :
  $L = \frac{\lambda}{4} = \frac{3.10^8}{4.10^3} = 0,75.10^5$ m = 75 km !! De plus, si la longueur est correcte pour 1 kHz, sera-t-elle correcte pour 800 Hz ?

- Pour une puissance d'émission $P_e$ donnée, la puissance reçue par l'antenne réceptrice est, en première approximation, proportionnelle à $f^2$. Par exemple si l'antenne réceptrice reçoit 1 mW pour 100 MHz, elle recevrait, à puissance d'émission constante, $\frac{10^{-3}}{\left(10^5\right)^2} = 10^{-13}$ W pour 1 kHz ! !

On voit donc qu'un signal basse fréquence ne peut être transmis directement par liaison hertzienne. L'idée consiste à utiliser **« une porteuse »** par exemple sinusoïdale de **haute fréquence** et de faire varier une de ces caractéristiques en fonction de l'information $s_i(t)$ :

$$s_p(t) = S_p.\cos\left(2.\pi.F_p.t + \Phi_p\right)$$

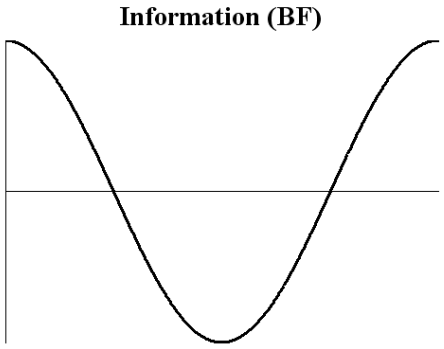
Nous avons 3 possibilités :

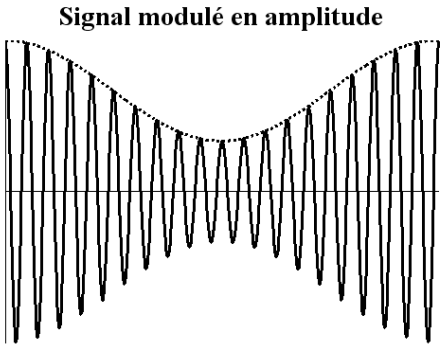
$S_p = S_p\left[s_i(t)\right]$ : modulation d'amplitude (MA)

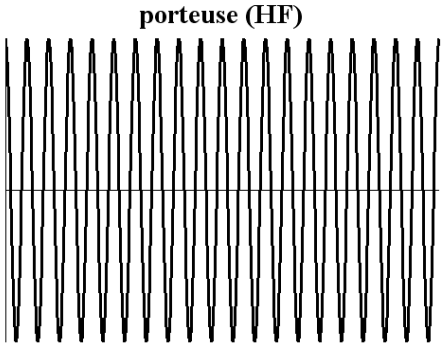
$F_p = F_p\left[s_i(t)\right]$ : modulation de fréquence (MF)

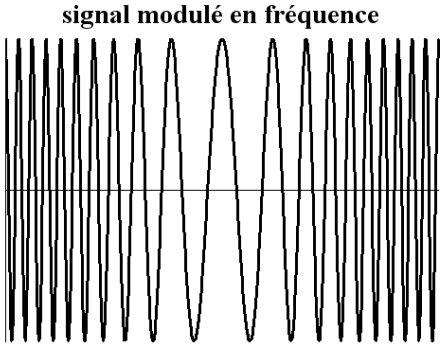
$\Phi_p = \Phi_p\left[s_i(t)\right]$ : modulation de phase (MP)

De plus, en utilisant des porteuses de fréquences différentes, on pourra transmettre simultanément plusieurs informations. On peut même transmettre simultanément deux informations sur la même porteuse en utilisant deux types de modulation (voir France Inter : porteuse 162 kHz, information radio en MA et information horaire en MP).




Remarques

- Les deux types de transmission (par câble ou par liaison hertzienne) ne s'excluent pas. On peut transmettre par câble des signaux modulés (c'est en particulier le cas pour les fibres optiques)
- La porteuse n'est pas obligatoirement sinusoïdale. On peut par exemple utiliser des signaux carrés ; on peut alors faire varier l'amplitude, la largeur (MLI ou PWM en anglais), l'espace entre 2 impulsions (densité d'impulsions) ou la fréquence.

On se limitera ici au cas des porteuses sinusoïdales : $s_p(t) = S_P.\cos\left(2.\pi.F_P.t\right) = S_P.\cos\left(\Omega_P.t\right)$.

Notations : pour les fréquences ou les pulsations, les lettres majuscules désigneront des hautes fréquences et les minuscules des basses fréquences.

## II/ Modulation d'amplitude

### -1- Principe

On fait varier, en général de façon linéaire, l'amplitude de la porteuse en fonction du signal modulant (information basse fréquence $s_i(t)$ ) :

Porteuse : $s_p(t) = S_P.\cos\left(\Omega_P.t\right)$

Information : $s_i(t) = S_i.\cos\left(\omega_i.t\right)$ $\quad (\omega_i \ll \Omega_P)$

Signal modulé : $s_m(t) = \underbrace{\underbrace{\left[S_P + \alpha.s_i(t)\right]}_{\text{Somme}}.\cos\left(\Omega_P.t\right)}_{\text{Produit}}$

Le paramètre $\alpha$ est une caractéristique du modulateur.

## -2- Taux de modulation

Pour alléger l'écriture, nous supposerons que $\alpha = 1$.
Dans le cas où l'information est sinusoïdale, on peut écrire :

$$s_m(t) = \left[S_P + s_i(t)\right].\cos\left(\Omega_P.t\right)$$

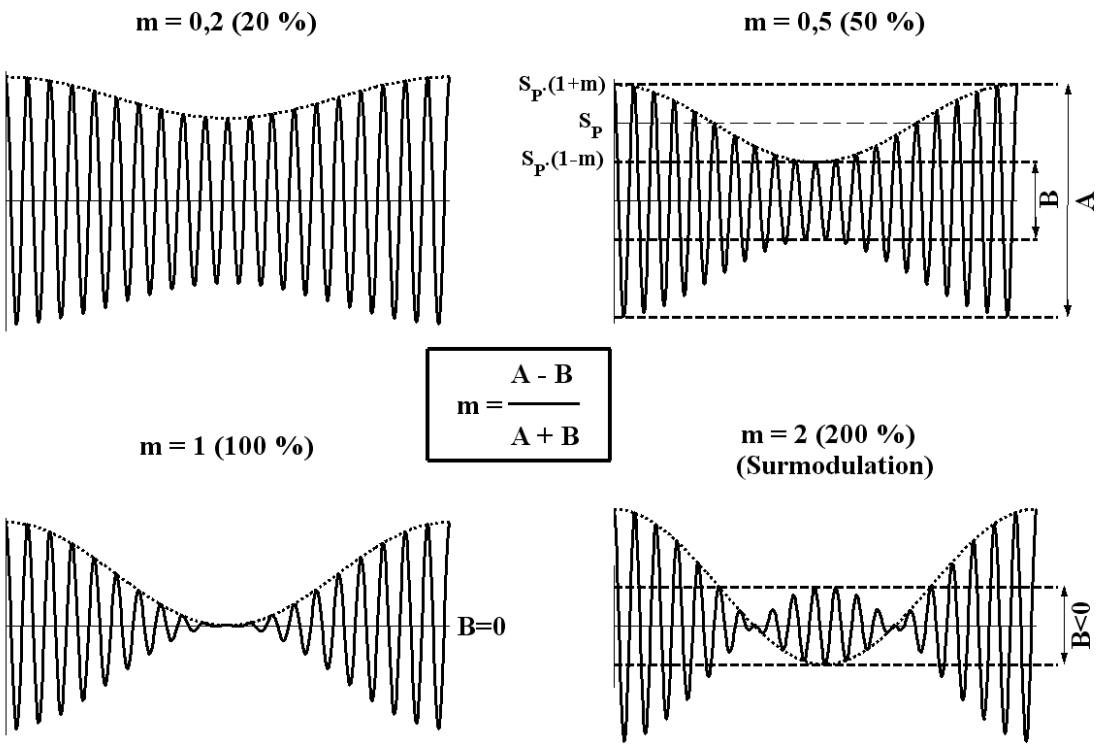
$$s_m(t) = \left[S_P + S_i.\cos\left(\omega_i.t\right)\right].\cos\left(\Omega_P.t\right)$$

$$\boxed{s_m(t) = S_P.\left[1 + m.\cos\left(\omega_i.t\right)\right].\cos\left(\Omega_P.t\right)}$$

en posant : $m = \dfrac{S_i}{S_P}$.

**m est le taux de modulation.** Il est souvent exprimé en %.

En général, $m \leq 1$. Si $m > 1$, on parle de « surmodulation ».



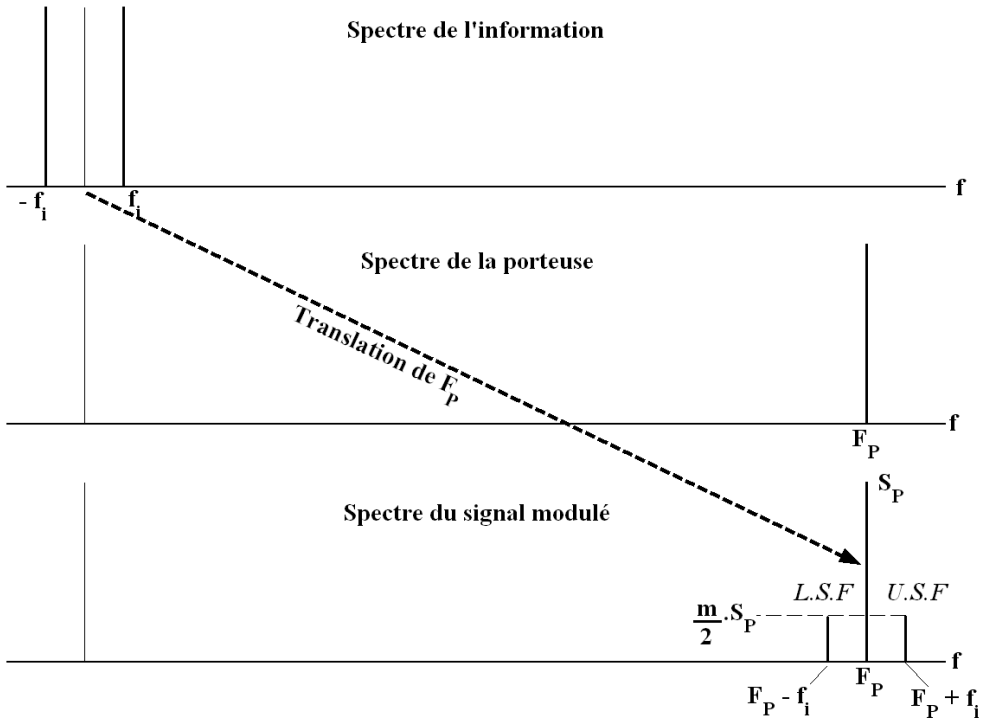

$$m = \frac{A - B}{A + B}$$

## -3- Aspect spectral

On a vu qu'un des intérêts de la modulation était de pouvoir envoyer plusieurs informations simultanément en utilisant des porteuses différentes. A la réception, il faut être capable de séparer les différents signaux (voir le chapitre sur le filtrage actif). Il ne faut pas que les spectres des différentes émissions se superposent. Pour chaque émission, il faut donc connaître la bande de fréquence occupée.

$$
\begin{aligned}
s_m(t) &= S_P.\left[1 + m.\cos(\omega_i.t)\right].\cos(\Omega_P.t) \\
&= S_P.\cos(\Omega_P.t) + m.S_P.\cos(\omega_i.t).\cos(\Omega_P.t) \\
&= \underbrace{S_P.\cos(\Omega_P.t)}_{\substack{\text{Amplitude } S_P \\ \text{fréquence } F_P}} + \underbrace{\frac{m.S_P}{2}.\cos\left[(\Omega_P - \omega_i).t\right]}_{\substack{\text{Amplitude } \frac{m.S_P}{2} \\ \text{fréquence } F_P - f_i}} + \underbrace{\frac{m.S_P}{2}.\cos\left[(\Omega_P + \omega_i).t\right]}_{\substack{\text{Amplitude } \frac{m.S_P}{2} \\ \text{fréquence } F_P + f_i}}
\end{aligned}
$$

D'où le spectre du signal modulé :

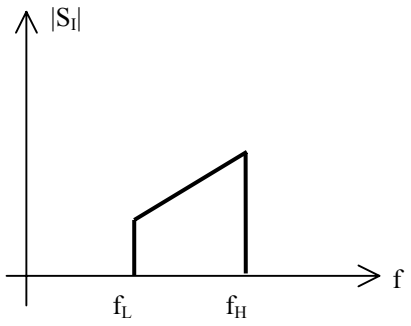



L.S.F. = Lower Side Frequency (bande latérale inférieure)
U.S.F. = Upper Side Frequency (bande latérale supérieure)

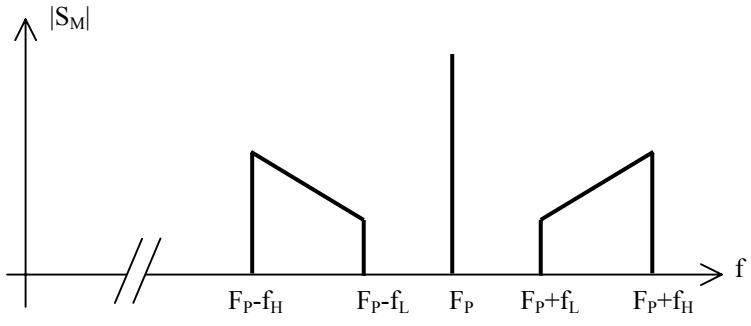
Conséquences :

- Le système d'émission ou le système de réception doit posséder une bande passante de largeur $2.f_i$ centrée sur $F_P$.
- Une émission voisine ne devra pas chevaucher la bande de fréquence $\left[F_P - f_i\ ;\ F_P + f_i\right]$

On peut généraliser le résultat précédent au cas où l'information n'est plus sinusoïdale ; $s_i$ est caractérisée par son spectre, compris dans la bande de fréquence $\left[f_L\ ;\ f_H\right]$ avec $f_L < f_H << F_P$ :




**Spectre de l'information**




**Spectre du signal modulé**

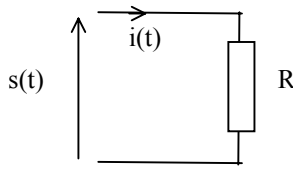
Caractéristiques du signal modulé :

- Le spectre est toujours centré sur $F_P$
- Le système traitant le signal modulé doit posséder une bande passante au moins égale à $2.f_H$

Ce type de modulation est appelée modulation D.S.B. (Double Side Band).

## -4- <u>Bilan énergétique</u>

### 4.1. <u>Puissance normalisée</u>




Considérons le montage ci-contre. La puissance dissipée par effet Joule est :

$$P = \frac{\langle s(t)^2 \rangle}{R} = R.\langle i(t)^2 \rangle$$

où $\langle s(t)^2 \rangle$ désigne la valeur moyenne de $s(t)^2$, c'est à dire le carré de la valeur efficace.

Pour définir la puissance normalisée, on choisit R = 1 Ω :

$$P_N = \langle s(t)^2 \rangle$$

### 4.2. <u>Puissance transportée par le signal modulé</u>

$$s_m(t) = S_P.\cos(\Omega_P.t) + \frac{m.S_P}{2}.\cos\left[(\Omega_P - \omega_i).t\right] + \frac{m.S_P}{2}.\cos\left[(\Omega_P + \omega_i).t\right]$$
$$= s_p(t) + s_{LSF}(t) + s_{USF}(t)$$

Chaque composante transporte une certaine puissance[1] et :

$$s_m(t)^2 = s_p(t)^2 + s_{LSF}(t)^2 + s_{USF}(t)^2 + 2.s_p(t).s_{LSF}(t) + 2.s_p(t).s_{USF}(t) + 2.s_{LSF}(t).s_{USF}(t)$$

En valeur moyenne :

$$\langle s_m(t)^2 \rangle = \langle s_p(t)^2 \rangle + \langle s_{LSF}(t)^2 \rangle + \langle s_{USF}(t)^2 \rangle$$

[1] Il s'agit ici de la puissance normalisée.

En effet :

$$\left\langle s_p(t).s_{LSF}(t)\right\rangle = \frac{m.S_P^{\,2}}{4}.\left\langle \cos\left(\Omega_p.t\right).\cos\left[\left(\Omega_P-\omega_i\right).t\right]\right\rangle$$
$$= \frac{m.S_P^{\,2}}{8}.\left\langle \cos\left[\left(2.\Omega_p-\omega_i\right).t\right]\right\rangle + \frac{m.S_P^{\,2}}{8}.\left\langle \cos\left(\omega_i.t\right)\right\rangle$$
$$= 0$$

Il en est de même pour les deux autres doubles produits.

La puissance transportée par le signal modulé a trois composantes :

- La puissance transportée par la porteuse :

  $P_P = \left\langle s_p(t)^2\right\rangle = \frac{S_P^{\,2}}{2}$ (valeur efficace au carré d'une sinusoide)

- la puissance transportée par la bande latérale inférieure :

  $P_{LSF} = \left\langle s_{LSF}(t)^2\right\rangle = \frac{1}{2}.\left(\frac{m.S_P}{2}\right)^2 = \frac{m^2.S_P^{\,2}}{8}$

- la puissance transportée par la bande latérale supérieure :

  $P_{USF} = \left\langle s_{USF}(t)^2\right\rangle = \frac{1}{2}.\left(\frac{m.S_P}{2}\right)^2 = \frac{m^2.S_P^{\,2}}{8}$

La puissance totale est :

$$P_T = P_P + P_{LSF} + P_{USF}$$
$$= \frac{S_P^{\,2}}{2} + 2.\frac{m^2.S_P^{\,2}}{8}$$
$$= \frac{S_P^{\,2}}{4}.\left(2+m^2\right)$$

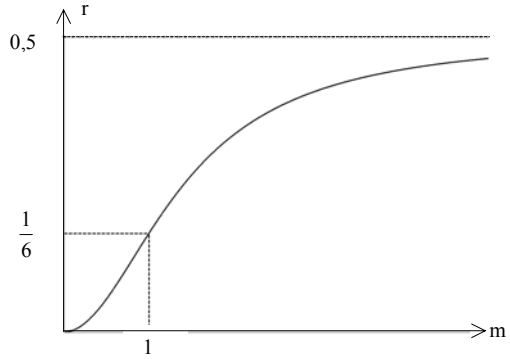
### 4.3. Puissance utile et rendement

L'information est contenue dans les deux bandes latérales, et même dans une seule bande latérale car les bandes inférieure et supérieure sont symétriques (il y a redondance de l'information). La puissance « utile » est donc :

$$P_u = P_{LSF} = P_{USF} = \frac{m^2.S_P^{\,2}}{8}$$

On peut définir le rendement par :

$$r = \frac{P_u}{P_T} = \frac{1}{2}.\frac{m^2}{2+m^2}$$




Dans la pratique, pour des questions de démodulation, on choisit des taux de modulation inférieurs à 100 %. Le procédé DSB a un rendement faible :

$$m \le 1 \Rightarrow r \le \frac{1}{6}\,(\simeq 16\%)$$

## -5- Amélioration du rendement : modulation « sans porteuse »

Dans l'expression de $s_m(t)$, on ne conserve que les termes contenant de l'information :

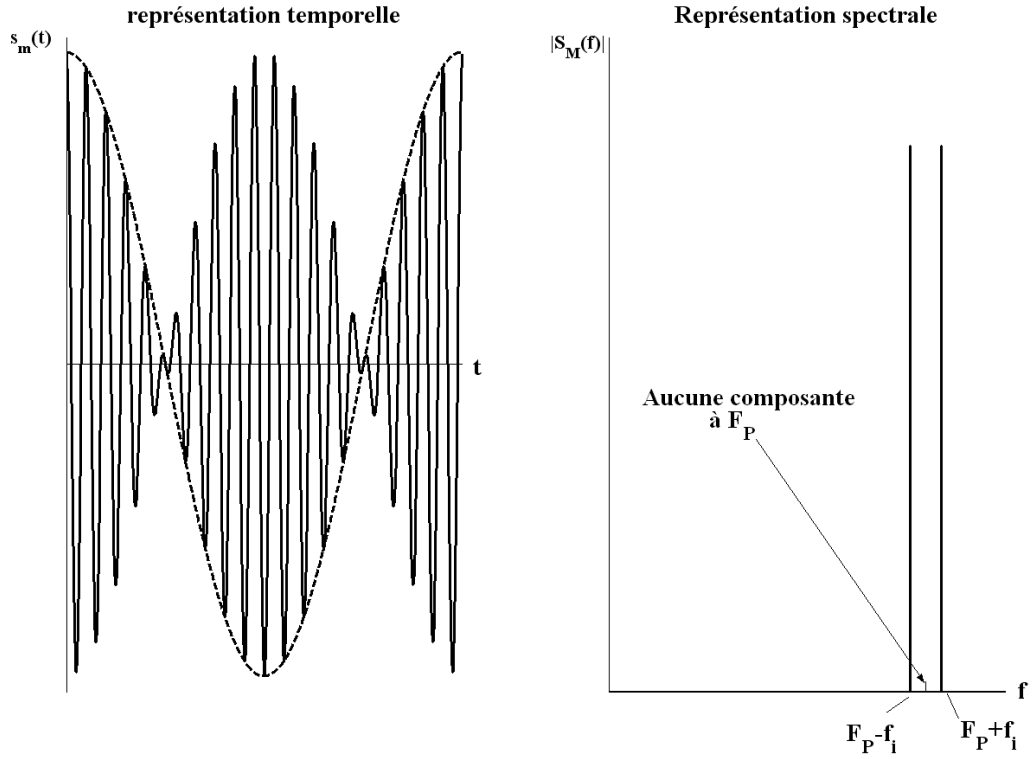
$$s_m(t) = \underbrace{\cancel{S_P.\cos(\Omega_P.t)}}_{\text{Aucune information}} + \underbrace{\frac{m.S_P}{2}.\cos\left[(\Omega_P - \omega_i).t\right] + \frac{m.S_P}{2}.\cos\left[(\Omega_P + \omega_i).t\right]}_{\text{Information}}$$

Le signal modulé s'écrit alors :

$$s_m(t) = \frac{m.S_P}{2}.\cos\left[(\Omega_P - \omega_i).t\right] + \frac{m.S_P}{2}.\cos\left[(\Omega_P + \omega_i).t\right]$$

$$= S_M.\cos(\omega_i.t).\cos(\Omega_P.t) \qquad (S_M = m.S_P)$$

La figure ci-dessous donne les deux représentations (temporelle et spectrale) du signal modulé « sans porteuse » .




Ce type de modulation est également appelée modulation D.S.B.S.C. : Double Side Band with Suppressed Carrier.

Remarque : on parle de modulation « sans porteuse » : ceci veut simplement dire que la porteuse n'est pas émise (il n'y a pas de composante spectrale à la fréquence $F_P$), mais physiquement il faut une porteuse pour transporter l'information (voir la représentation temporelle ci-dessus), c'est à dire pour décaler le spectre de l'information vers les hautes fréquences (voir la représentation spectrale)

L'encombrement spectral en modulation DSB ou DSBSC est le même, par contre en DSBSC le rendement énergétique est : $r = \frac{1}{2} = 50\ \%$ $(m \to \infty)$, à comparer à $r \leq \frac{1}{6}$ en DSB.

### -6- <u>Bande latérale unique (BLU)</u>

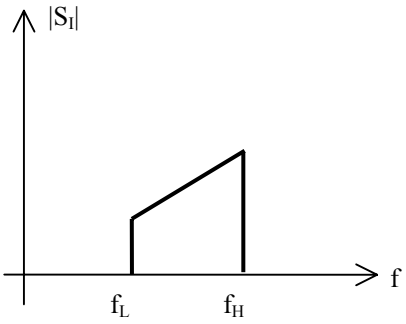
On peut améliorer le rendement énergétique et diminuer l'encombrement spectral en remarquant qu'en modulation DSBSC on envoie deux fois trop d'informations : il suffit de transmettre une seule bande (bande latérale unique), soit inférieure soit supérieure.

Si l'information est sinusoïdale :

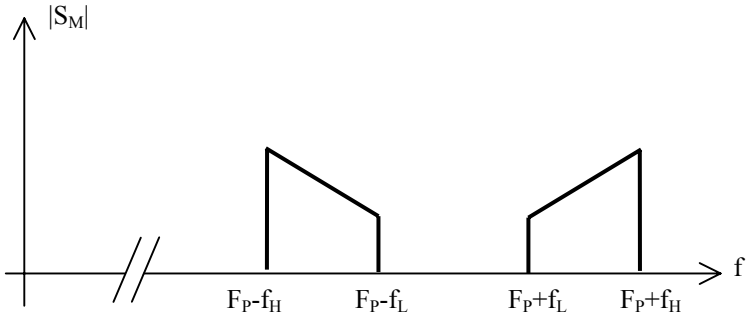
$$s_m(t) = S_M.\cos\left[\left(\Omega_P + \omega_i\right).t\right] \qquad \text{(bande latérale supérieure)}$$

ou

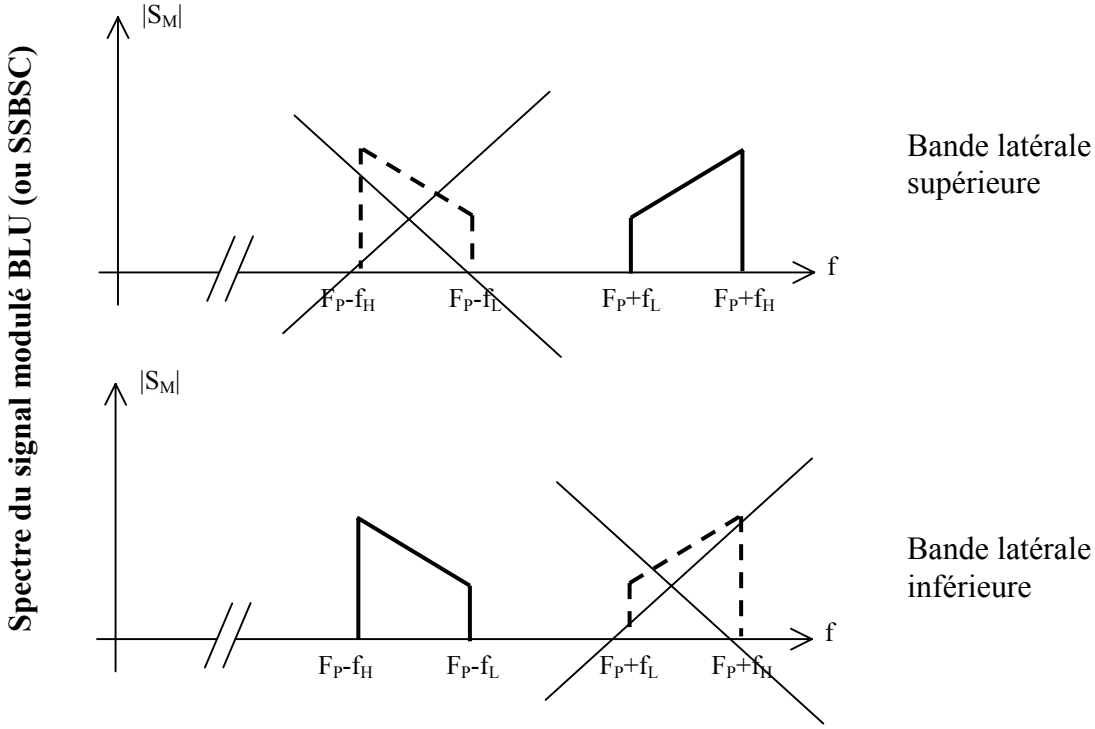
$$s_m(t) = S_M.\cos\left[\left(\Omega_P - \omega_i\right).t\right] \qquad \text{(bande latérale inférieure)}$$




**Spectre de l'information**




**Spectre du signal modulé DSBSC**




La modulation BLU est encore appelée modulation SSBSC (Single Side Band with Suppressed Carrier). Son rendement tend vers 100 % et l'encombrement spectrale est réduit à $f_H - f_L$ (encombrement inférieur à $f_H$).

## -7- Translation spectrale

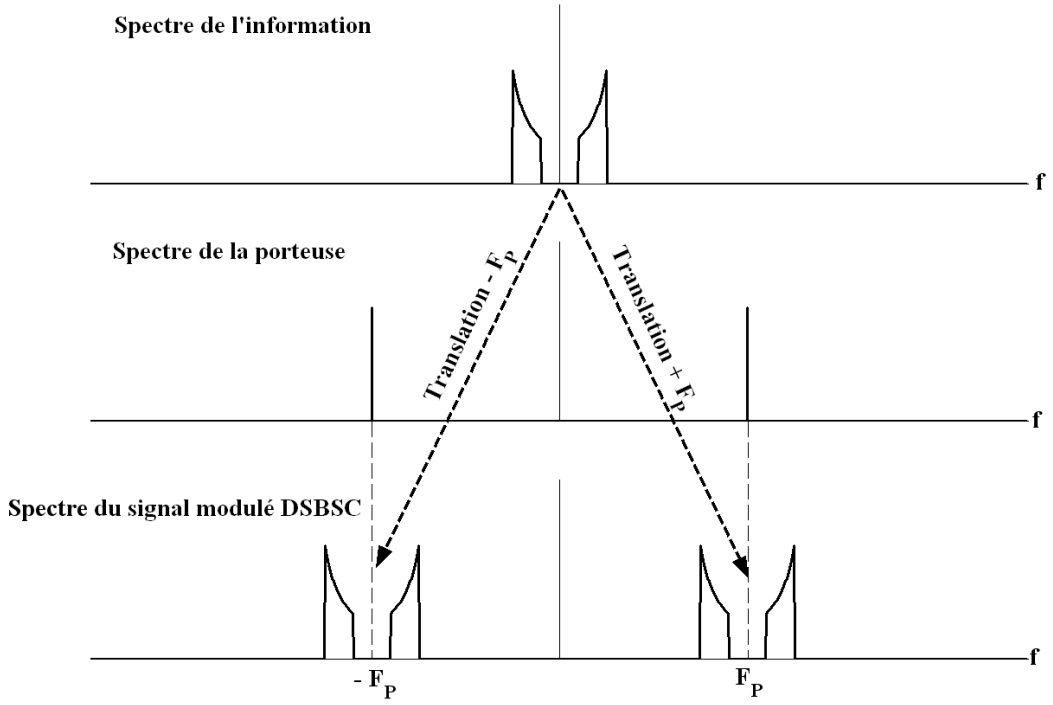
Considérons une information basse fréquence $s_i(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_I(f).e^{j.2.\pi.f.t}.df$ , et une porteuse haute fréquence : $s_p(t) = \cos(2.\pi.F_P.t) = \frac{1}{2}.\left[e^{j.2.\pi.F_P.t} + e^{-j.2.\pi.F_P.t}\right]$. En modulation d'amplitude « sans porteuse » (DSBSC), le signal modulé s'écrit :

$$s_m(t) = s_i(t).\cos(2.\pi.F_P.t)$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} S_I(f).e^{j.2.\pi.f.t}.df\right].\frac{1}{2}.\left[e^{j.2.\pi.F_P.t} + e^{-j.2.\pi.F_P.t}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} S_I(f).e^{j.2.\pi.(F_P+f).t}.df + \int_{-\infty}^{+\infty} S_I(f).e^{j.2.\pi.(-F_P+f).t}.df\right]$$

Du point de vue spectral, une modulation « sans porteuse » (ou multiplier dans le temps un signal par $\cos(2.\pi.F_P.t)$ ) revient à translater le spectre de – $F_P$ et + $F_P$.

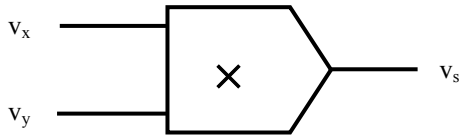



Nous utiliserons cette propriété pour la démodulation.

## III/ Exemples de montages modulateurs

### -1- Multiplieurs

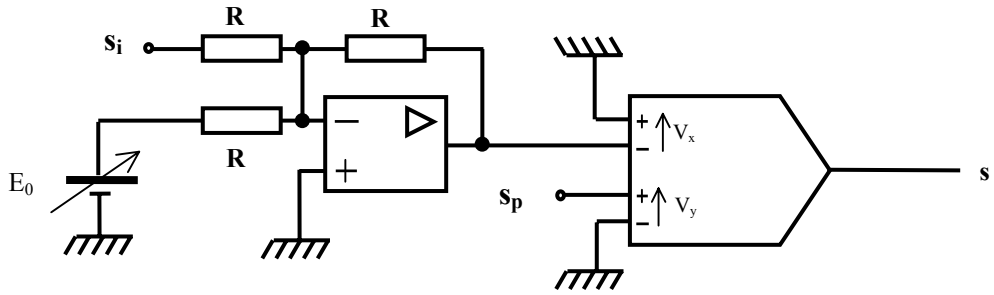
Il existe des circuits intégrés « multiplieurs analogiques » (à base d'amplificateurs différentiels) :




$$v_s = \frac{v_x . v_y}{U_C}$$

$U_C$ est une caractéristique du circuit.

Associé à un additionneur, on obtient un modulateur (voir T.P.) :



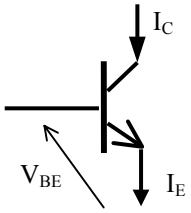

$$s(t) = \frac{(E_0 + s_i).s_p}{U_C} = \frac{S_P . E_0}{U_C} . \left[ 1 + \frac{S_I}{E_0} . \cos(\omega_i . t) \right] . \cos(\Omega_p . t)$$

si l'information est sinusoïdale.
$E_0$ permet de régler le taux de modulation m. Pour une modulation DSBSC, il suffit de faire $E_0 = 0$.

### -2- Utilisation d'éléments non linéaires

Exemple : transistor bipolaire :

$$I_C \simeq I_E = I_S . e^{\frac{V_{BE}}{V_T}} \quad \text{où} \quad V_T = \frac{k.T}{q}$$




Si la tension $V_{BE}$ est la superposition d'une tension continue de polarisation $V_{BE0}$ et d'une tension variable v, il en sera de même pour $I_C$ :

$$I_C = I_{C0} + i = I_S . e^{\frac{V_{BE0} + v}{V_T}} = \underbrace{I_S . e^{\frac{V_{BE0}}{V_T}}}_{I_{C0}} . e^{\frac{v}{V_T}}$$

Un développement limité donne :

$$I_{C0} + i = I_{C0} . \left[ 1 + \frac{v}{V_T} + \frac{1}{2!} . \frac{v^2}{{V_T}^2} + ... \right]$$

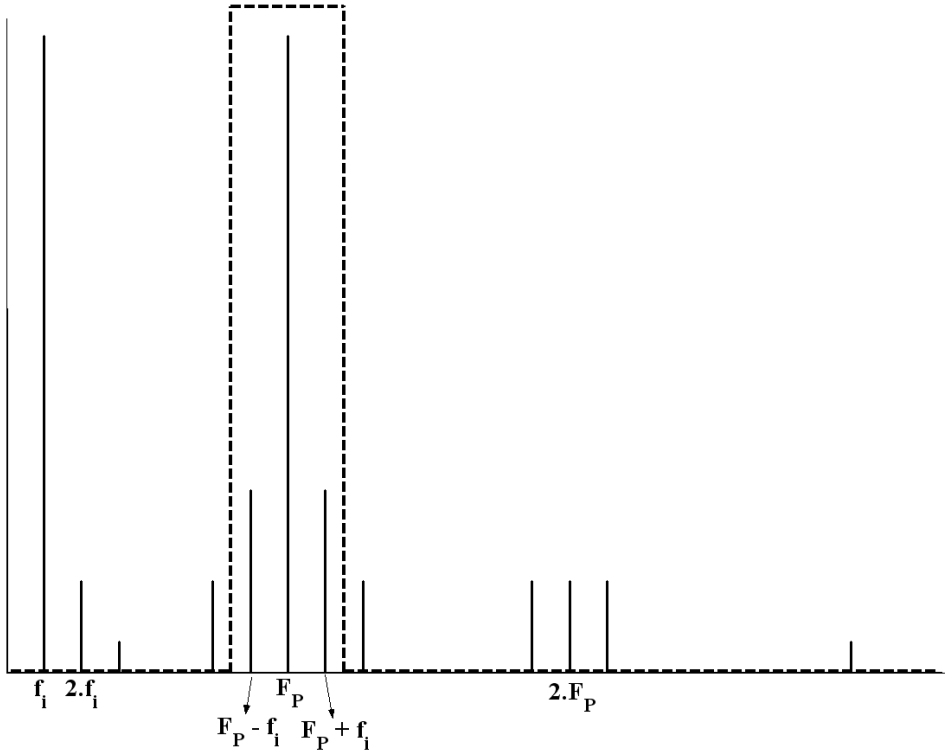
i pourra s'écrire : $i = a.v + b.v^2 + c.v^3 + ...$

Si v est la somme de l'information $s_i(t)$ et de la porteuse $s_P(t)$, on obtient :

$$i = a.(s_i + s_P) + b.(s_i + s_P)^2 + c.(s_i + s_P)^3 + ...$$

$$= \underbrace{a.s_i}_{f_i} + \underbrace{s_P}_{F_P} + \underbrace{b.s_i^2}_{0 \text{ et } 2.f_I} + \underbrace{b.s_p^2}_{0 \text{ et } 2.F_P} + \underbrace{2.b.s_i.s_p}_{F_P + f_i \text{ et } F_P - f_i} + \underbrace{c.s_i^3}_{3.f_i \text{ et } f_i} + \underbrace{c.s_p^3}_{3.F_P \text{ et } F_P} + \underbrace{3.c.s_i^2.s_p}_{F_P + 2.f_i \text{ et } F_P - 2.f_i} + \underbrace{3.c.s_i.s_p^2}_{2.F_P + f_i \text{ et } 2.F_P - f_i} + ...$$

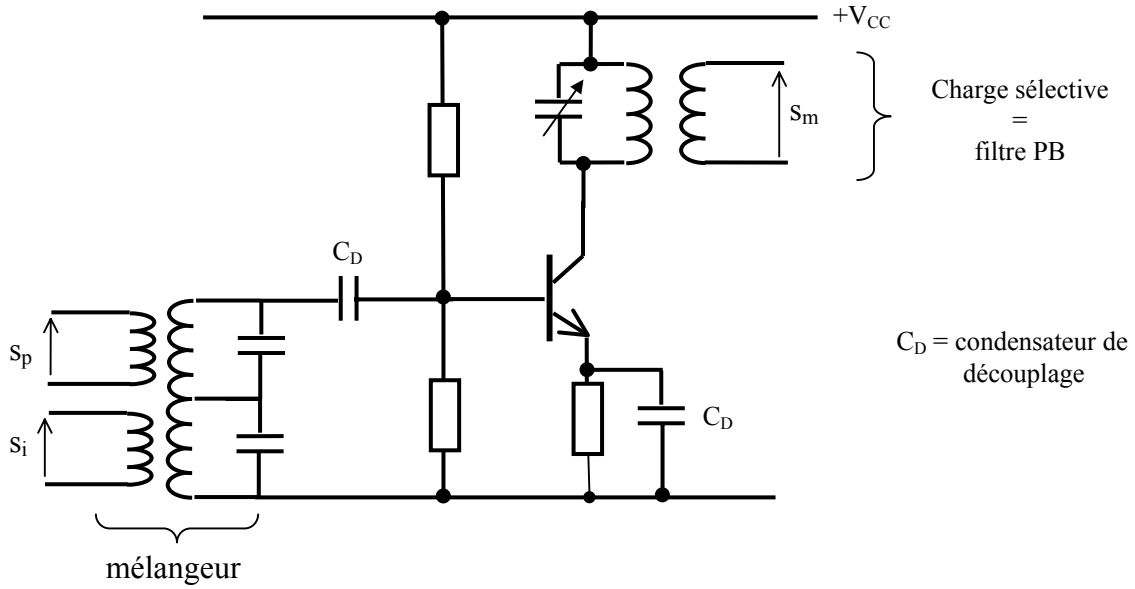
On obtient le spectre représenté ci-dessous :




Un filtre passe-bande permettra de ne garder que les raies à $F_P - f_i$, $F_P$ et $F_P + f_i$.

Dans le cas général, si $s_i(t)$ possède un spectre allant de $f_L$ à $f_H$, le filtre passe-bande doit être centré sur $F_P$ et avoir une largeur de bande passante de $2.f_H$.

Le schéma de principe du montage est donné ci-dessous :

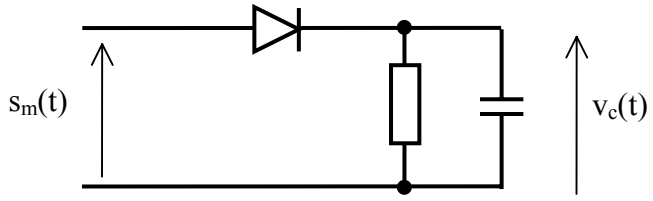


## IV/ Détection

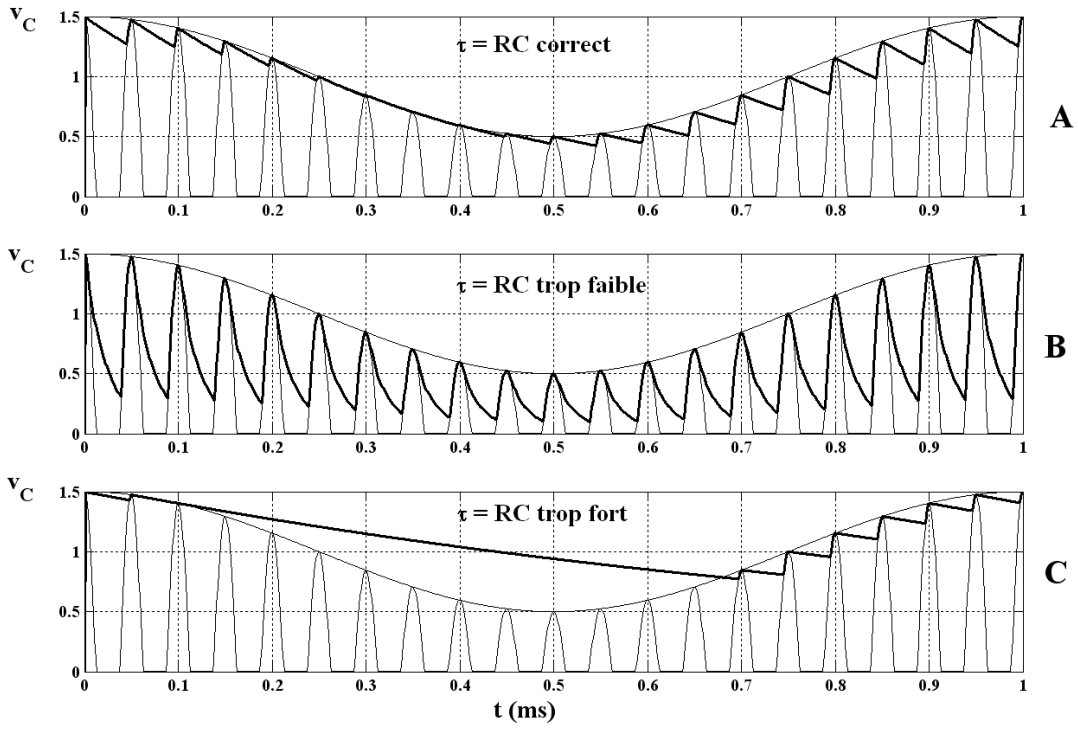
Nous avons étudié le côté émetteur (comment produire un signal modulé en amplitude ? ). Plaçons nous maintenant du côté récepteur : comment extraire du signal modulé l'information ? Comment **détecter** cette information ?

### -1- Détecteur d'enveloppe

Ce dispositif, très simple, est utilisé pour une modulation DSB, avec des taux de modulation inférieurs à 100 %.




Nous supposerons que le signal modulé $s_m(t)$ a été au préalable suffisamment amplifié pour pouvoir négliger la tension de seuil de la diode.

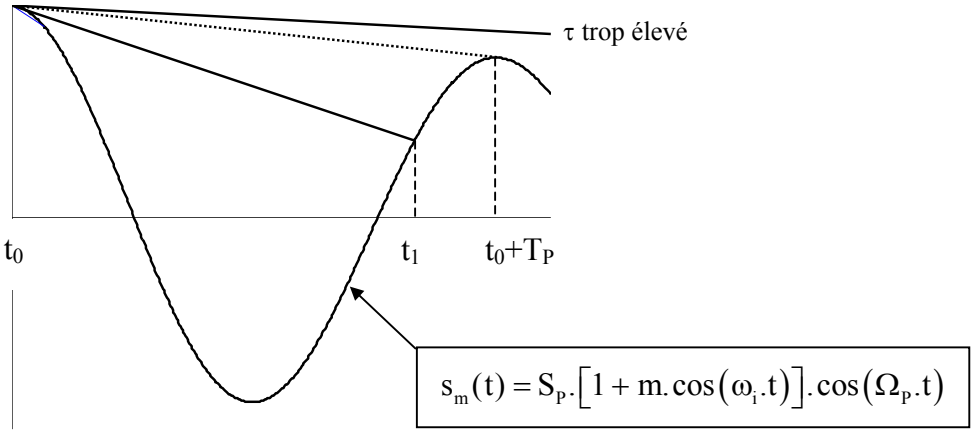



La figure ci-dessus montre que le choix de la constante de temps $\tau = R.C$ est important (pour mettre en évidence les phénomènes, le rapport $F_P/f_i$ est beaucoup plus faible que dans la pratique). Il faut que d'une alternance à l'autre :

- Le condensateur ait le temps de se charger ou décharger pour suivre l'information
- Le condensateur n'ait pas le temps de trop se décharger.

D'où les 3 cas :

- Cas A : choix correct de $\tau$
- Cas B : $\tau$ est trop faible et le condensateur se décharge trop d'une alternance à l'autre. Pour éviter ceci il faut que : $\tau >> T_P = \frac{1}{F_P} = \frac{2.\pi}{\Omega_P}$
- cas C : $\tau$ est trop élevée, et le condensateur ne se décharge pas suffisamment rapidement pour que $v_C$ puisse suivre l'information




Soit $t_0$ un instant tel que : $\cos\Omega_p.t_0 = 1$. La diode se bloque. Il faut que la pente de $v_C(t)$ à cet instant soit plus forte (en valeur absolue) que la pente de l'enveloppe :

$$t \geq t_0 : v_C(t) = S_P.\left[1 + m.\cos(\omega_i.t_0)\right].\cos(\Omega_p.t_0).e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$$

$$= S_P.\left[1 + m.\cos(\omega_i.t_0)\right].e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \qquad \text{car } \cos(\Omega_p.t_0) = 1$$

$$\Rightarrow \left|\frac{dv_C}{dt}\right|_{t=t_0} = \frac{1}{\tau}.S_P.\left(1 + m.\cos\omega_i.t_0\right)$$

L'équation de l'enveloppe est : $e(t) = S_P.\left[1 + m.\cos(\omega_i.t)\right] \Rightarrow \left|\frac{de}{dt}\right|_{t=t_0} = m.S_P.\omega_i.\sin(\omega_i.t_0)$

Il faut donc que : $\frac{1}{\tau}.S_P.\left[1 + m.\cos(\omega_i.t_0)\right] > m.S_P.\omega_i.\sin(\omega_i.t_0) \Rightarrow \tau < \frac{1 + m.\cos(\omega_i.t_0)}{m.\omega_i.\sin(\omega_i.t_0)}$

Cette condition devant être vérifiée pour toutes les valeurs de $t_0$, il faut que $\tau$ soit inférieur à la valeur minimale de $\frac{1 + m.\cos(\omega_i.t_0)}{m.\omega_i.\sin(\omega_i.t_0)}$. Cette valeur minimale est obtenue lorsque $\cos\omega_i.t_0 = -m$.

On obtient finalement : $\boxed{\tau \leq \frac{\sqrt{1-m^2}}{m.\omega_i}}$

Globalement, il faut donc que : $\boxed{\frac{2.\pi}{\Omega_P} \ll \tau \leq \frac{\sqrt{1-m^2}}{m.\omega_i}}$

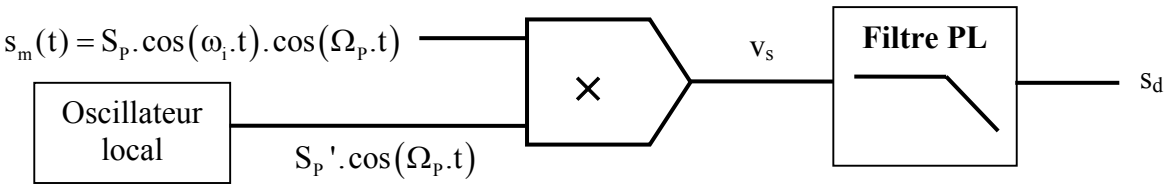
## -2- <u>Détection synchrone (appelée également détection cohérente)</u>

Le détecteur d'enveloppe ne fonctionne que si :

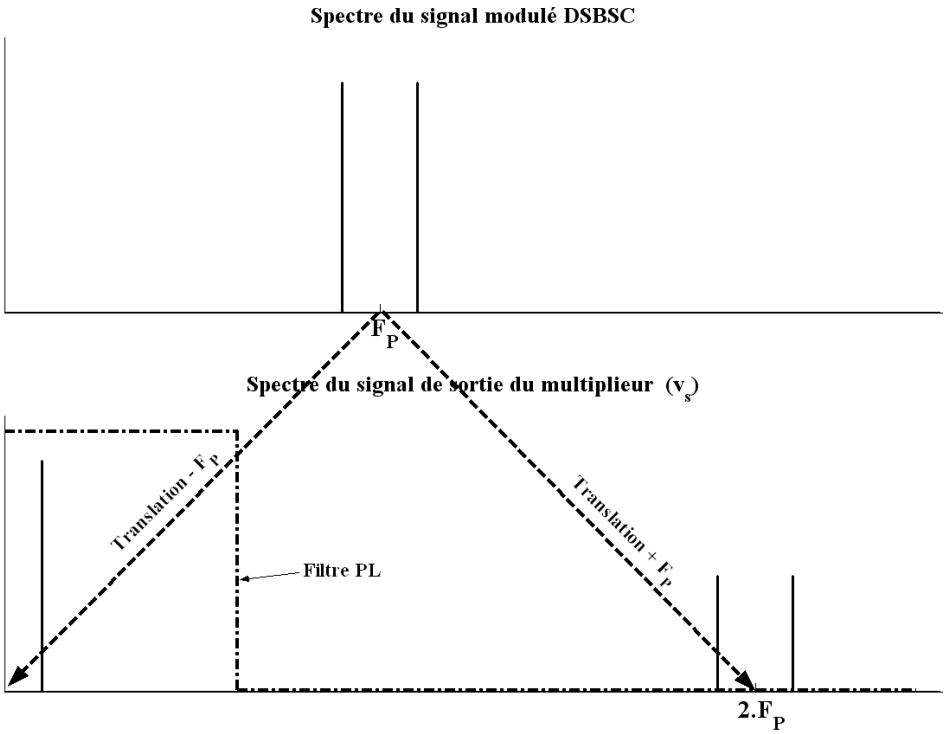
- $m < 100\ \%$
- la tension de seuil de la diode est négligeable (d'où des problèmes si $m \simeq 1$)
- il faut que la modulation soit du type DSB (avec porteuse)

Si le signal modulé est du type DSBSC : $s_m(t) = S_p.\cos(\omega_i.t).\cos(\Omega_p.t)$, le détecteur d'enveloppe fournit une sinusoïde redressée double alternance et non une sinusoïde (rôle de la diode).

Le problème est le suivant : on reçoit un signal dont le spectre est centré sur $F_P$ ; on souhaite obtenir un autre signal dont le spectre est centré sur 0. Il faut donc translater le spectre du signal modulé de $– F_P$. Ceci peut être réalisé par un multiplieur (II-7) :




Du point de vue spectral :



$$v_s = \frac{S_P.S_P'}{U_C}.\cos(\omega_i.t).\cos^2(\Omega_P.t)$$

$$= \frac{S_P.S_P'}{2.U_C}.\cos(\omega_i.t).\left[1+\cos(2.\Omega_P.t)\right]$$

$$= \underbrace{\frac{S_P.\boxed{S_P'}}{\boxed{2.U_C}}.\cos(\omega_i.t)}_{\text{information}} + \underbrace{\frac{S_P.S_P'}{4.U_C}.\left\{\cos\left[(2.\Omega_P-\omega_i).t\right]+\cos\left[(2.\Omega_P+\omega_i).t\right]\right\}}_{\text{termes éliminés après filtrage}}$$

cste ←

Le filtre doit avoir une fréquence de coupure telle que : $f_H << f_c << 2.F_P - f_H \ (\simeq 2.F_P)$ où $f_H$ est la plus haute fréquence du spectre de l'information.

Le signal $S_P'.\cos(\Omega_P.t)$, issu d'un oscillateur local, doit être de même fréquence que la porteuse : il doit être **synchrone** avec la porteuse. De plus il doit être également **cohérent** avec la porteuse, c'est à dire qu'il doit avoir une phase parfaitement définie par rapport à la porteuse.

Soit φ ce déphasage : $s_p'(t) = S_P'.\cos(\Omega_P.t+\varphi)$. Il est facile de montrer qu'en sortie du filtre, on récupère le signal : $s_d(t) = \frac{S_P.S_P'}{4.U_C}.\cos(\omega_i.t).\underline{\underline{\cos\varphi}}$ ; il y aura donc des problèmes si :

- $\varphi = \frac{\pi}{2}$
- φ varie au cours du temps : l'information se trouve modulée par $\cos[\varphi(t)]$ !

Avantages de la détection synchrone :

1. cette détection fonctionne quel que soit le niveau du signal modulé d'entrée
2. elle fonctionne pour toute valeur de m, en DSBSC et en SSBSC (BLU)
3. elle améliore le rapport signal sur bruit. Le bruit étant aléatoire, sa phase par rapport à la porteuse est quelconque et la valeur moyenne de $\cos[\varphi(t)]$ est nulle.

Inconvénient : il faut un oscillateur recréant localement la porteuse (même fréquence et si possible même phase). On est amené à utiliser une PLL (voir chapitre suivant).

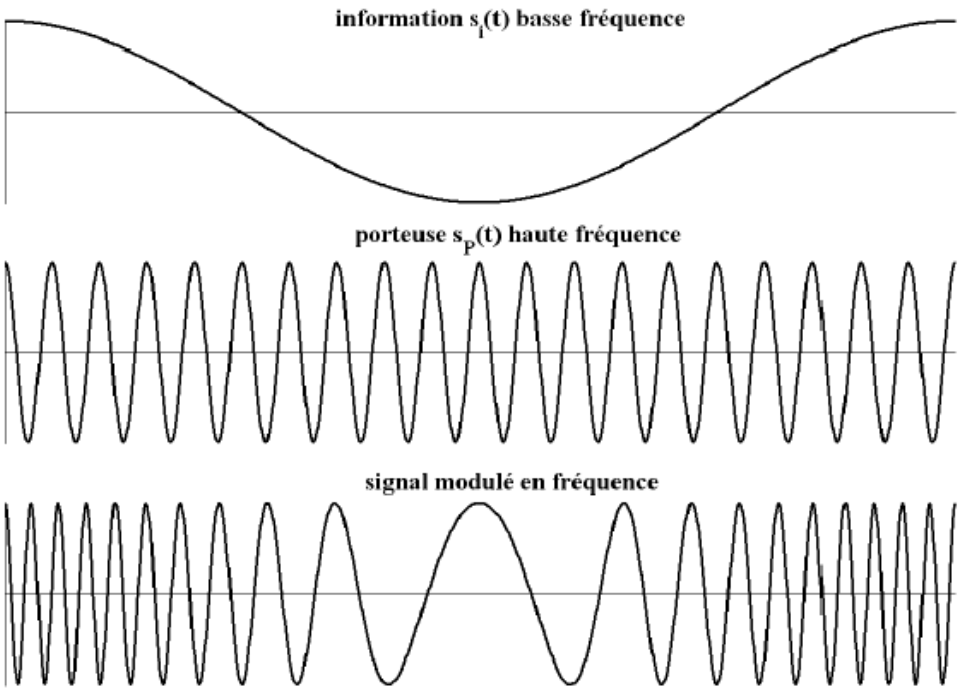
Dans la pratique, on ne fait pas rigoureusement de la modulation DSBSC : on envoie une petite portion de porteuse (par exemple atténuée de 20 dB) de façon à pouvoir synchroniser l'oscillateur local.

## V/ Modulation de fréquence

La modulation d'amplitude présente un inconvénient majeur : les parasites (le « bruit ») affectent essentiellement l'amplitude du signal émis. Or c'est justement les variations de l'amplitude qui permettent de transporter une information ; cette information sera donc elle-même entachée de bruit.

Le remède est d'utiliser la modulation de fréquence : la fréquence F du signal émis est fonction de l'information :

$F(t) = F_P + \alpha.s_i(t)$ ($\alpha$ est une constante)




### -1- Pulsation et fréquence instantanées

Considérons un signal sinusoïdal quelconque, modulé ou pas :

$s(t) = S(t).\cos[\theta(t)]$

En modulation d'amplitude, l'information $s_i(t)$ intervient dans S(t). En modulation de fréquence, cette information intervient dans $\theta(t)$.

Supposons ici que $S(t) = S_P = cste$

**Par définition, la pulsation instantanée $\Omega(t)$ est :**

$$\Omega(t) = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow F(t) = \frac{1}{2.\pi}.\frac{d\theta}{dt}$$

En particulier, si $\theta(t) = \omega_0.t + \varphi_0$, on retrouve $\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} = \omega_0 = cste$

### -2- Expression d'un signal modulé en fréquence

La fréquence instantanée F(t) varie autour de la fréquence $F_P$ de la porteuse :

$$F(t) = F_P + \alpha.s_i(t) \quad \text{ou} \quad \Omega(t) = \Omega_P + 2.\pi.\alpha.s_i(t)$$

$\alpha$ est une constante.

D'où :

$$\theta(t) - \theta(0) = \int_0^t \Omega(\tau).d\tau = \Omega_P.t + 2.\pi.\alpha.\int_0^t s_i(\tau).d\tau$$

Pour simplifier cette expression, nous supposerons que $\theta(0) = 0$. Le signal modulé en fréquence, avec une porteuse de pulsation $\Omega_P$, par le signal $s_i(t)$ aura pour expression :

$$s_m(t) = S_P.\cos\left[\Omega_P.t + 2.\pi.\alpha.\int_0^t s_i(\tau).d\tau\right]$$

### -3- Cas particulier d'une information sinusoïdale

Soit une information $s_i(t) = S_i.\mathbf{cos}(\omega_i.t)$.

La pulsation instantanée du signal modulé en fréquence s'écrira :

$$\Omega(t) = \Omega_P + 2.\pi.\alpha.S_i.\cos(\omega_i.t)$$

et sa fréquence :

$$F(t) = F_P + \alpha.S_i.\cos(\omega_i.t) = F_P + \Delta F.\cos(\omega_i.t) \quad \text{en posant : } \Delta F = \alpha.S_i$$

$\Delta F.\cos(\omega_i.t)$ est la déviation instantanée de fréquence. On voit que :

$$F_P - \Delta F \le F(t) \le F_P + \Delta F$$

$\Delta F = \alpha.S_i$ est **l'excursion en fréquence**.

Par analogie avec la modulation d'amplitude, $k = \dfrac{\Delta F}{F_P} = \dfrac{\Delta\Omega}{\Omega_P}$ est le **taux** de modulation.

En général ce taux est très faible ; par exemple pour la radio :

$$F_P \approx 100\text{MHz} \text{ , } \Delta F \approx 50\text{ kHz} \Rightarrow k \approx 5.10^{-4}$$

Expression du signal modulé :

$$\Omega(t) = \Omega_P + 2.\pi.\alpha.S_i.\mathbf{cos}(\omega_i.t) = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \theta(t) = \Omega_P.t + \underbrace{\boxed{\frac{2.\pi.\alpha.S_i}{\omega_i}}}_{m}.\mathbf{sin}(\omega_i.t)$$

en introduisant **l'indice** de modulation :

$$\boxed{m = \frac{2.\pi.\alpha.S_i}{\omega_i} = \frac{\Delta\Omega}{\omega_i} = \frac{\Delta F}{f_i}}$$

(Attention : ne pas confondre le taux de modulation, en général très faible, et l'indice de modulation qui lui peut prendre n'importe quelle valeur. Par exemple en radio :

$$\left.\begin{array}{l} 20\text{ Hz} \le f_i \le 20\text{ kHz} \\ \Delta F \approx 50\text{ kHz} \end{array}\right\} \Rightarrow 2{,}5 \le m \le 2\,500 \quad )$$

Un signal modulé en fréquence par $s_i(t) = S_i.\mathbf{cos}(\omega_i.t)$ a pour expression :

$$s_m(t) = S_P.\cos\left[\Omega_P.t + m.\mathbf{sin}(\omega_i.t)\right] \quad \text{où} \quad m = \frac{\Delta\Omega}{\omega_i} = \frac{\Delta F}{f_i}$$

### -4- <u>Spectre d'un signal modulé en fréquence par une information sinusoïdale</u>

Nous avons vu que ce problème est important : quelle plage de fréquences doit-on réserver pour une émission donnée ?

$$s_i(t) = S_i.\cos(\omega_i.t) \Rightarrow s_m(t) = S_P.\cos\left[\Omega_P.t + m.\sin(\omega_i.t)\right]$$
$$= S_P.\left\{\cos(\Omega_P.t).\cos\left[m.\sin(\omega_i.t)\right] - \sin(\Omega_P.t).\sin\left[m.\sin(\omega_i.t)\right]\right\}$$

Problème : décomposer en série de Fourier $\cos\left[m.\sin(\omega_i.t)\right]$ ou $\sin\left[m.\sin(\omega_i.t)\right]$ ?

Les calculs conduisent à des intégrales compliquées qui font appel aux fonctions de BESSEL[2] (voir annexe) :

$$\cos\left[m.\sin(\omega.t)\right] = J_0(m) + 2.J_2(m).\cos(2.\omega.t) + 2.J_4(m).\cos(4.\omega.t) + ...$$
$$\sin\left[m.\sin(\omega.t)\right] = 2.J_1(m).\sin(\omega.t) + 2.J_3(m).\sin(3.\omega.t) + ...$$

D'où :

$$\frac{s_m(t)}{S_P} = \cos(\Omega_P.t).\left[J_0(m) + 2.J_2(m).\cos(2.\omega_i.t) + ...\right] - \sin(\Omega_P.t).\left[2.J_1(m).\sin(\omega_i.t) + 2.J_3(m).\sin(3.\omega_i.t) + ...\right]$$
$$= J_0(m).\cos(\Omega_P.t) - 2.J_1(m).\underbrace{\sin(\Omega_P.t).\sin(\omega_i.t)}_{\frac{1}{2}.\left\{\cos\left[(\Omega_P-\omega_i).t\right] - \cos\left[(\Omega_P+\omega_i).t\right]\right\}} + 2.J_2(m).\underbrace{\cos(\Omega_P.t).\cos(2.\omega_i.t)}_{\frac{1}{2}.\left\{\cos\left[(\Omega_P-2.\omega_i).t\right] + \cos\left[(\Omega_P+2.\omega_i).t\right]\right\}} - ...$$
$$= J_0(m).\cos(\Omega_P.t) + J_1(m).\left\{\cos\left[(\Omega_P+\omega_i).t\right] - \cos\left[(\Omega_P-\omega_i).t\right]\right\} + J_2(m).\left\{\cos\left[(\Omega_P+2.\omega_i).t\right] + \cos\left[(\Omega_P-2.\omega_i).t\right]\right\} + ...$$

Conclusions :

- Théoriquement, il y a une infinité de raies
- Les termes $J_n(m)$ ne forment pas une suite immédiatement décroissante
- On peut montrer que 98 % de la puissance se situe dans la bande $\left[F_P - a.f_i\ ;\ F_P + a.f\right]$ où a est le nombre entier immédiatement supérieur à m + 1.
  Approximativement, la bande de fréquence occupée par le signal modulé est $\left[F_P - (m+1).f_i\ ;\ F_P + (m+1).f\right]$

Pour la radio en modulation de fréquence, de qualité Hi-Fi, $20\ \text{Hz} \le f_i \le 20\ \text{kHz}$ et les normes sont :

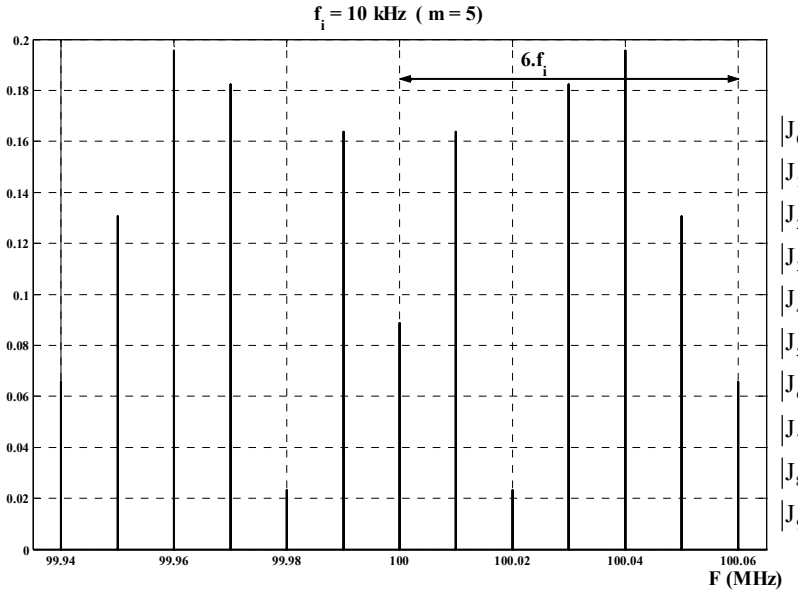
- Porteuse : $88\ \text{MHz} \le F_P \le 108\ \text{MHz}$
- Excursion en fréquence : $\Delta F \le 75\ \text{kHz}$
- Bande d'émission : 200 kHz maximum
  $\left(\ B \simeq 2.(\Delta F + f_i) \le 2.(75 + 20) = 190\ \text{kHz}\ \right)$

Ceci autorise $\dfrac{20.10^6}{200.10^3} = 100$ émissions différentes.

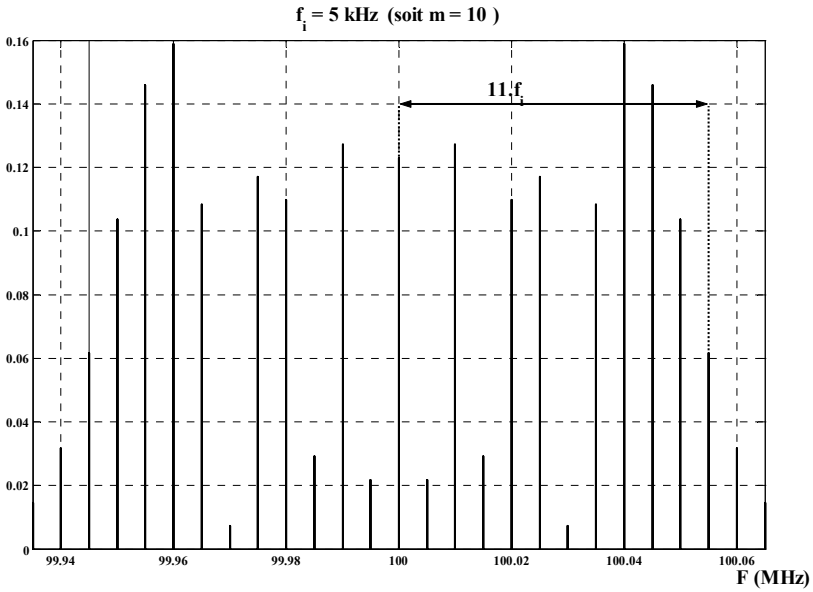
Sur la page suivante sont donnés des exemples de spectre de signaux modulés en fréquence par une information sinusoïdale :

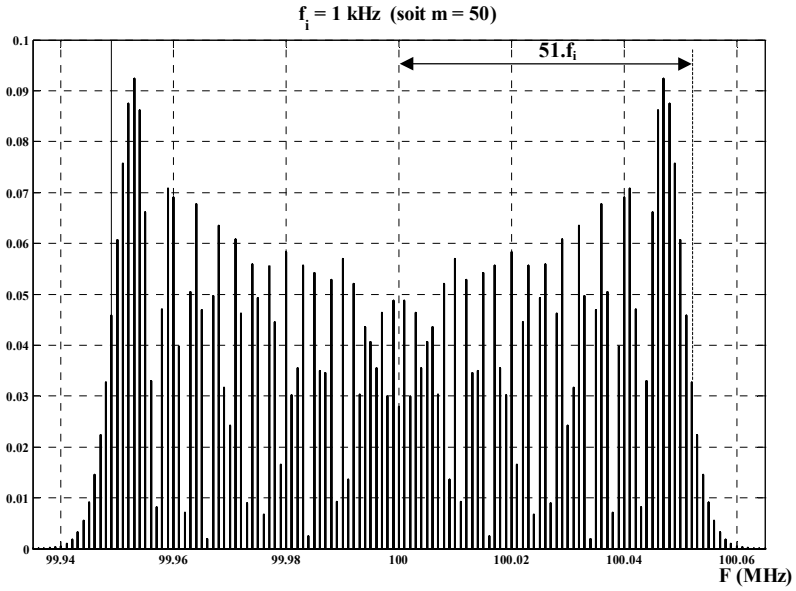
[2] Bessel : astronome allemand né en 1784 et mort en 1846

## Exemples de spectre de signaux modulés en fréquence : $F_P$ = 100 MHz ; $\Delta F$ = 50 kHz




| | Puissance relative (%) | |
|---|---|---|
| $\lvert J_0(5)\rvert = 0,178$ | 6,1 | |
| $\lvert J_1(5)\rvert = 0,328$ | 20,8 | |
| $\lvert J_2(5)\rvert = 0,047$ | 0,4 | |
| $\lvert J_3(5)\rvert = 0,365$ | 25,8 | 99,3 % |
| $\lvert J_4(5)\rvert = 0,391$ | 29,7 | |
| $\lvert J_5(5)\rvert = 0,261$ | 13,2 | |
| $\lvert J_6(5)\rvert = 0,131$ | 3,3 | |
| $\lvert J_7(5)\rvert = 0,053$ | 0,6 | |
| $\lvert J_8(5)\rvert = 0,018$ | 0,06 | |
| $\lvert J_9(5)\rvert = 0,006$ | 0,006 | |



### -5- Modulation de phase

Le signal modulé peut s 'écrire :

$$s_m(t) = S_P.\cos\left[\Omega_P.t + \varphi(t)\right]$$

où $\varphi(t)$ est fonction de l'information :

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \alpha.s_i(t) \qquad (\alpha = \text{cste})$$

La pulsation instantanée du signal modulé est :

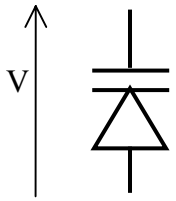
$$\Omega(t) = \frac{d\left[\Omega_P.t + \varphi(t)\right]}{dt} = \Omega_P + \frac{d\varphi}{dt} = \Omega_P + \alpha.\frac{ds_i}{dt}$$

**Un signal modulé en phase par $s_i(t)$ est un signal modulé en fréquence par $\frac{ds_i}{dt}$**

## VI/ Exemples de montages modulateurs

### -1- Utilisation d'une varicap

On utilise la capacité d'une jonction polarisée en inverse :



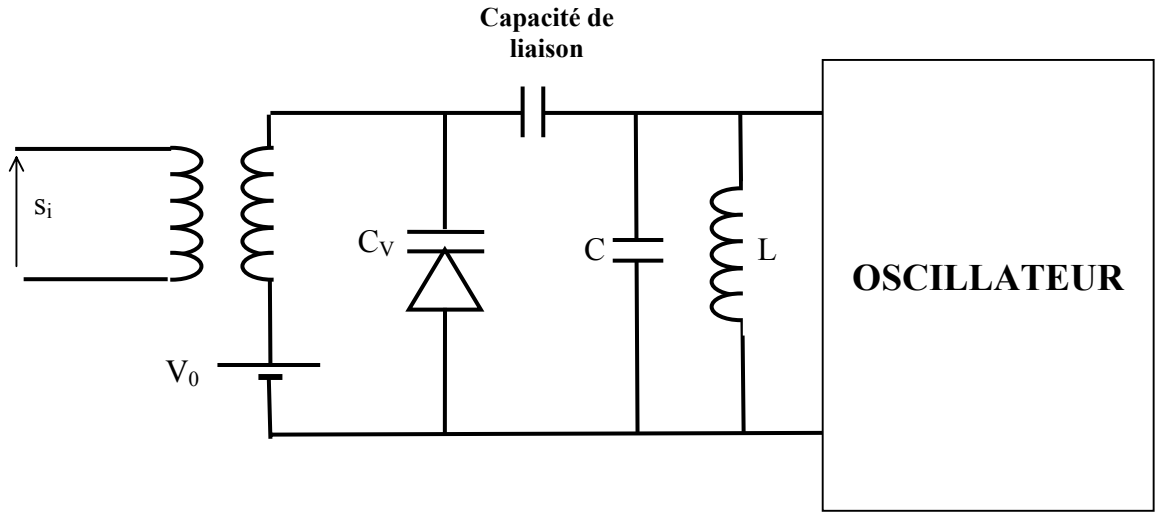

$$C_V = A.V^n \qquad \text{avec en général : } \frac{1}{3} \le n \le \frac{1}{2}$$

On superpose à une tension de polarisation $V_0$ l'information $s_i(t)$ : $V = V_0 + s_i(t)$

$$\left.\begin{array}{l} C_V = A.V^n \\ V = V_0 + s_i(t) \end{array}\right\} \Rightarrow C_V = A.\left[V_0 + s_i(t)\right]^n = \underbrace{A.V_0^{\,n}}_{C_0}.\left[1 + \frac{s_i(t)}{V_0}\right]^n \approx C_0.\left[1 + n.\frac{s_i(t)}{V_0}\right]$$

si $\left|s_i(t)\right| \ll V_0$.

Considérons un oscillateur dont la fréquence d'oscillation est fixée par un circuit L - C. Si on branche en parallèle sur C une varicap, on pourra faire varier la fréquence de l'oscillateur. D'où le schéma de principe du modulateur :



$$F_{osc} = \frac{1}{2.\pi.\sqrt{L.(C + C_V)}} = \frac{1}{2.\pi.\sqrt{L.\left[C + C_0.\left(1 + n.\frac{s_i(t)}{V_0}\right)\right]}}$$

$$= \frac{1}{2.\pi.\sqrt{L.(C + C_0).\left(1 + \frac{C_0}{C + C_0}.n.\frac{s_i(t)}{V_0}\right)}}$$

D'où :

$$F_{osc} \approx \frac{1}{2.\pi.\sqrt{L.(C + C_0)}}.\left[1 - \frac{1}{2}.n.\frac{C_0}{C + C_0}.\frac{1}{V_0}.s_i(t)\right]$$

$F_P$

$\alpha$ constante caractéristique du modulateur

Ce type de montages permet d'obtenir des fréquences de porteuse élevées, avec des taux de modulation faibles Il existe des variantes utilisant des dispositifs « à réactances variables » réalisés à l'aide de transistors à effet de champ.

### -2- Oscillateur contrôlé en tension (V.C.O.)

Voir le montage étudié en TD et en TP : $F = \frac{1}{16.R.C}.\frac{V_C}{V_{seuil}}$.

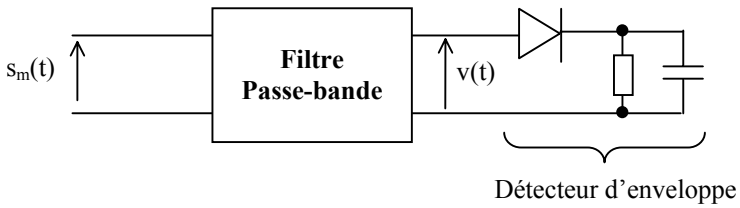
Il suffit de faire $V_C = V_{C0} + s_i(t)$ pour obtenir un signal modulé en fréquence. Ce principe est utilisé dans les VCO (Voltage Controlled Oscillator) intégrés (du type 8038), dans lesquels on trouve souvent un convertisseur à diodes permettant d'obtenir une sortie sinusoïdale.

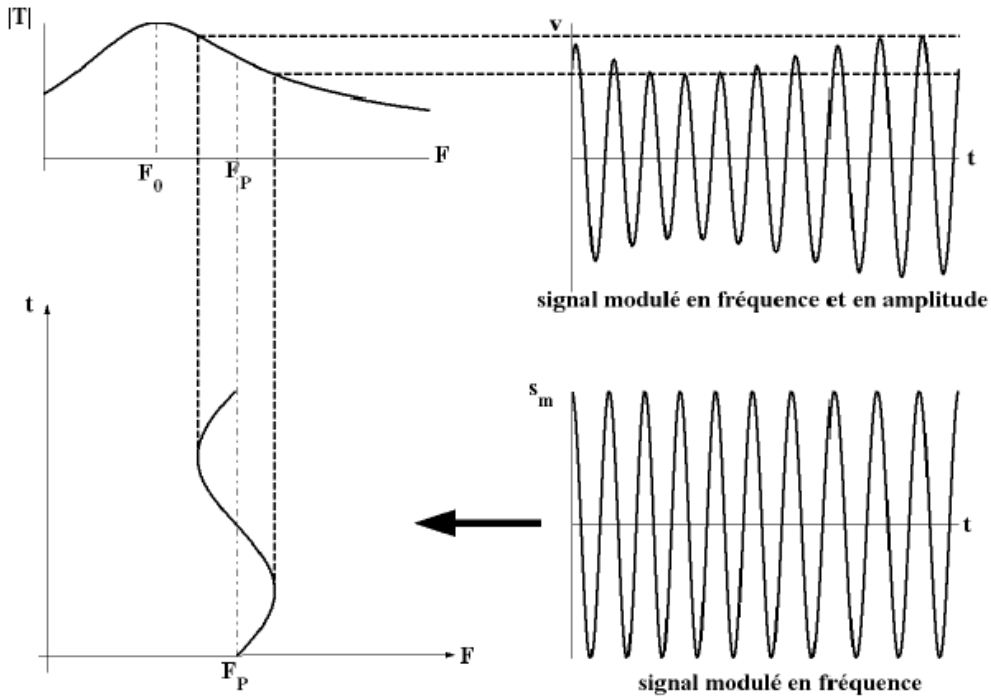
Ces circuits ne permettent pas d'obtenir des porteuses de fréquence élevée ($F_P < 1{,}5$ MHz pour le VCO intégré 8038). On peut en revanche obtenir des taux de modulation élevés (on parle souvent dans cas de « Vobulation »).

## VII/ Démodulation d'un signal modulé en fréquence

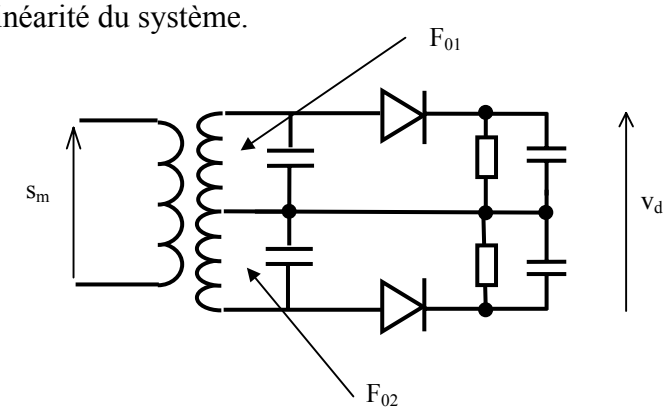
### -1- Discriminateur de fréquence

On cherche à transformer le signal modulé en fréquence en un signal modulé en amplitude, puis on réalise une démodulation d'amplitude. Pour faire ce changement de modulation, on peut utiliser un filtre passe-bande, dont la fréquence centrale $F_0$ est différente de la fréquence $F_P$ de la porteuse.






Il existe des variantes, associant deux circuits passe-bande (discriminateur de Travis) améliorant la linéarité du système.

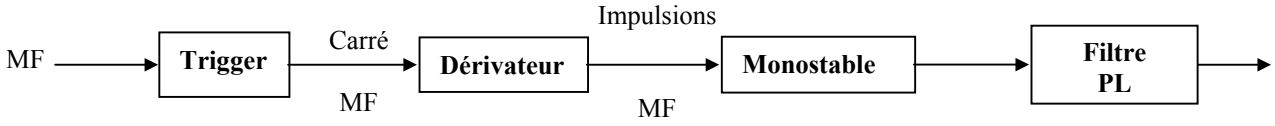


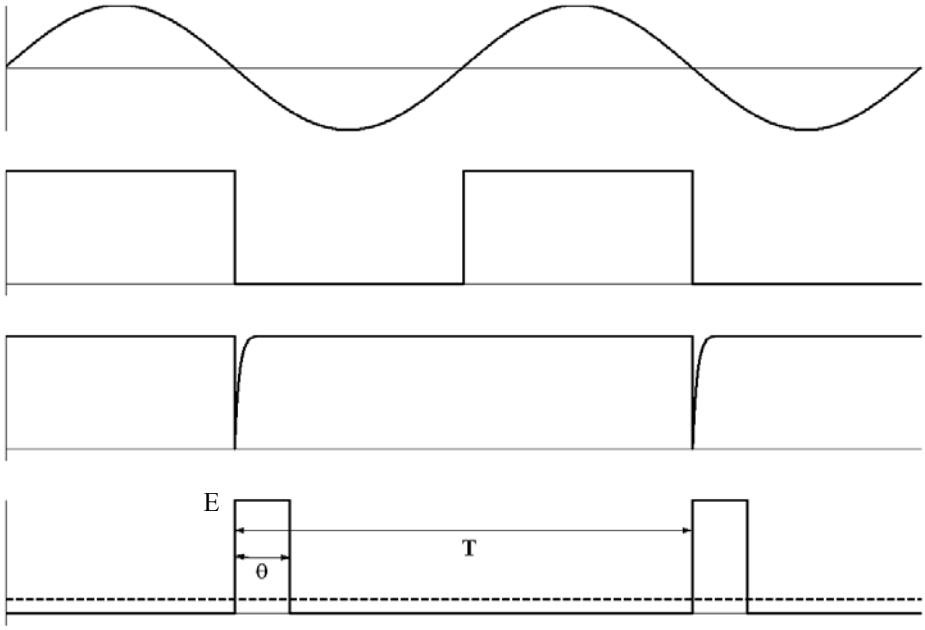

$(F_{01} < F_P < F_{02})$

Ce type de démodulateurs présente un intérêt historique : il ne sont plus guère utilisés en raison de la délicatesse des réglages.

### -2- <u>Conversion fréquence – tension</u>

Le schéma de principe est donné ci-dessous :



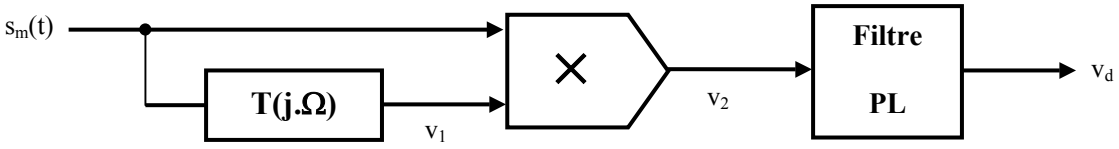



En sortie du filtre on obtient : $v(t) = E.\frac{\theta}{T} = \underbrace{E.\theta}_{\text{cste}}.F$ , signal proportionnel à la fréquence.

On peut utiliser ce type de démodulateur pour des taux de modulation élevés (vobulation)

### -3- <u>Démodulateur à déphasage (ou en quadrature)</u>

Le schéma de principe est représenté ci-dessous : il comporte un circuit déphaseur de fonction de transfert T(j.Ω), un multiplieur analogique (caractérisé par $U_C$) et un filtre passe-bas.




Soit $s_m(t) = S_P.\cos(\Omega.t)$ le signal d'entrée, supposé sinusoïdal (non modulé) dans un premier temps. Par définition de la fonction de transfert :

$$v_1(t) = S_P.\left|T(j.\Omega)\right|.\cos\left[\Omega.t + \text{Arg}\left[T(j.\Omega)\right]\right]$$

En sortie du multiplieur :

$$v_2(t) = \frac{S_P^{\,2}}{U_C}.\left|T(j.\Omega)\right|.\cos\left[\Omega.t + \text{Arg}\left[T(j.\Omega)\right]\right].\cos(\Omega.t)$$

$$= \frac{S_P^{\,2}}{2.U_C}.\left|T(j.\Omega)\right|.\left\{\underbrace{\cos\left[2.\Omega.t + \text{Arg}\left[T(j.\Omega)\right]\right]}_{\text{Eliminé par filtrage}} + \cos\left[\text{Arg}\left[T(j.\Omega)\right]\right]\right\}$$

Le filtre passe-bas sert à éliminer le terme de pulsation 2.Ω. En sortie on a donc :

$$v_d(t) = \frac{S_P{}^2}{2.U_C}.\left|T(j.\Omega)\right|.\cos\left[\mathrm{Arg}\left[T(j.\Omega)\right]\right] = \frac{S_P{}^2}{2.U_C}.T_R(j.\Omega)$$

où $T_R(j.\Omega)$ désigne la partie réelle de la fonction de transfert.

Exemple : $T(j.\Omega) = \dfrac{1-\dfrac{j.\Omega}{\Omega_0}}{1+\dfrac{j.\Omega}{\Omega_0}} = \dfrac{1-\left(\dfrac{\Omega}{\Omega_0}\right)^2 - 2.\dfrac{j.\Omega}{\Omega_0}}{1+\left(\dfrac{\Omega}{\Omega_0}\right)^2} \Rightarrow T_R(j.\Omega) = \dfrac{1-\left(\dfrac{\Omega}{\Omega_0}\right)^2}{1+\left(\dfrac{\Omega}{\Omega_0}\right)^2}$.

Supposons maintenant que le signal d'entrée est modulé en fréquence et que $\Omega_0 = \Omega_P$ . Ω varie autour de $\Omega_P$ : $\Omega = \Omega_P + \delta\Omega$, avec $\left|\delta\Omega\right| \le \Delta\Omega$ excursion en fréquence. Les taux de modulation étant très petits : $\Omega = \Omega_P + \delta\Omega = \Omega_P.\left[1+\dfrac{\delta\Omega}{\Omega_P}\right] = \Omega_P.(1+\varepsilon)$ avec $\left|\varepsilon\right| \ll 1$ .

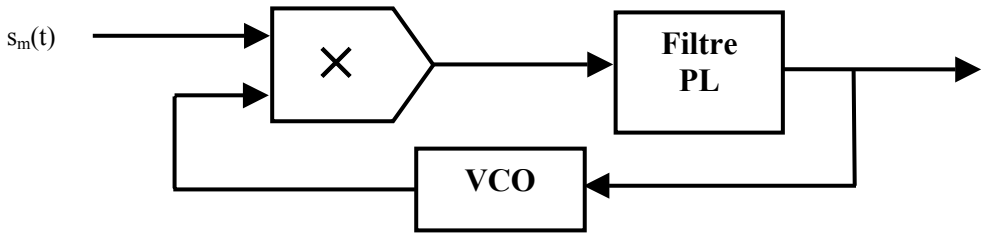
D'où :

$$T_R(j.\Omega) = \frac{1-\left(\dfrac{\Omega}{\Omega_0}\right)^2}{1+\left(\dfrac{\Omega}{\Omega_0}\right)^2} = \frac{1-(1+\varepsilon)^2}{1+(1+\varepsilon)^2} \simeq -\varepsilon = -\frac{\delta\Omega}{\Omega_P} \quad (\Omega_0 = \Omega_P)$$

Or $\delta\Omega$ est fonction de l'information $s_i(t)$. Le signal de sortie du filtre est donc proportionnel à l'information $s_i(t)$ ; on a bien réalisé une démodulation.
Intérêt de ce montage : facilité des réglages.

### -4- <u>Boucle à verrouillage de phase (P.L.L.)</u>

Une des idées premières pour réaliser une démodulation de fréquence est de faire une transformation modulation de fréquence en modulation d'amplitude, puis de réaliser une démodulation d'amplitude. Or les taux de modulation sont très faibles : on risque d'avoir de gros problèmes de parasites . Il faut absolument utiliser une détection synchrone.
Mais cette détection nécessite de récréer localement la porteuse (de la modulation d'amplitude !) ; or dans notre cas elle varie constamment car le signal est modulé en amplitude mais aussi en fréquence. On va donc utiliser le signal de sortie du démodulateur (proportionnel à l'information basse fréquence $s_i(t)$) pour recréer localement la porteuse.
D'où la structure d'une PLL, qui sera étudiée en détail dans le prochain chapitre.



## Annexe : fonctions de BESSEL $J_n(x)$

### Définition

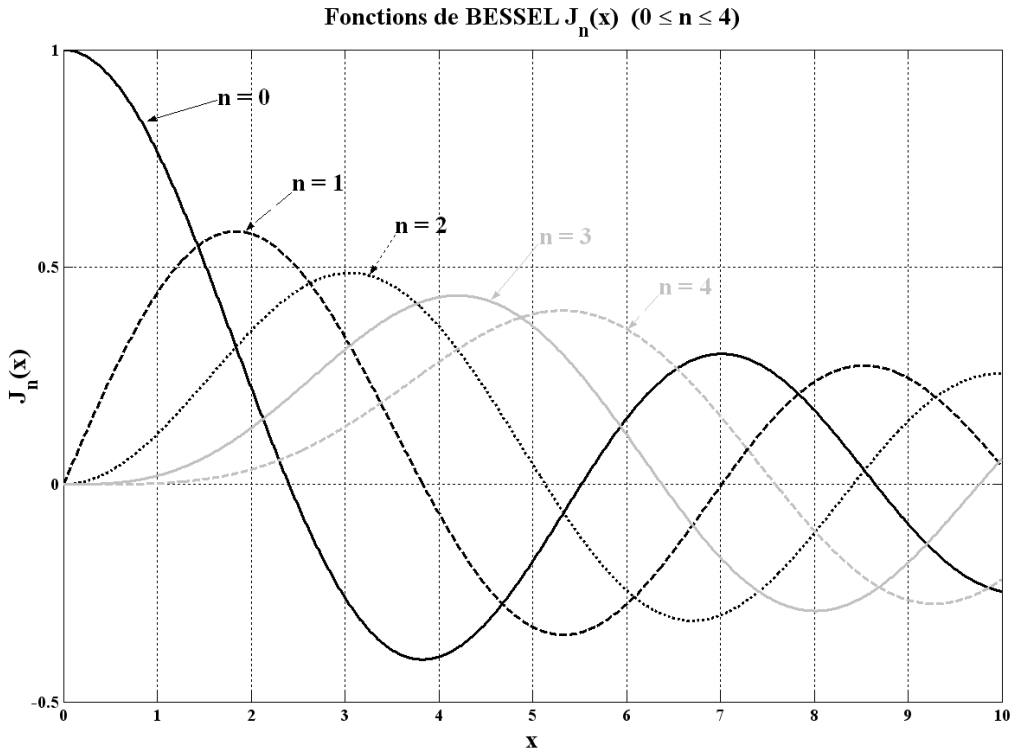
Solutions de l'équation différentielle : $$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}.\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right).y = 0$$

### Relations de récurrence

$$2.\frac{n}{x}.J_n(x) = J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x)$$

$$2.\frac{dJ_n}{dx} = J_{n+1}(x) - J_{n-1}(x)$$

### Représentations graphiques




### Propriétés importantes pour la modulation de fréquence

$$\cos\left[m.\sin(\omega.t)\right] = J_0(m) + 2.J_2(m).\cos(2.\omega.t) + 2.J_4(m).\cos(4.\omega.t) + ...$$

$$\sin\left[m.\sin(\omega.t)\right] = 2.J_1(m).\sin(\omega.t) + 2.J_3(m).\sin(3.\omega.t) + ...$$

Pour un signal sinusoïdal de fréquence $F_P$, modulé en fréquence par une information sinusoïdale de fréquence $f_i$ ($f_i << F_P$), **98% au moins de la puissance** se trouve dans les raies comprises entre $\mathbf{F_p - a.f_i}$ **et** $\mathbf{F_p + a.f_i}$ où a est l'entier immédiatement supérieur à $\mathbf{m + 1}$

D'où la règle approchée (règle de Carson) :

**La transmission du signal modulé nécessite une plage de fréquences de largeur :**

$$\mathbf{B = 2.(m + 1).f_i = 2.(\Delta F + f_i)}$$

**Valeurs de $J_n(x)$**

| x \ n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1,000 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0,25 | 0,984 | 0,124 | 0,008 | | | | | | | | | | | | | | |
| 0,5 | 0,939 | 0,242 | 0,031 | 0,003 | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 0,765 | 0,440 | 0,115 | 0,020 | 0,002 | | | | | | | | | | | | |
| 1,5 | 0,512 | 0,558 | 0,232 | 0,061 | 0,012 | 0,002 | | | | | | | | | | | |
| 2 | 0,224 | 0,577 | 0,353 | 0,129 | 0,034 | 0,007 | 0,001 | | | | | | | | | | |
| 3 | -0,260 | 0,339 | 0,486 | 0,309 | 0,132 | 0,043 | 0,011 | 0,003 | 0,001 | | | | | | | | |
| 4 | -0,397 | -0,066 | 0,364 | 0,439 | 0,281 | 0,132 | 0,049 | 0,015 | 0,004 | 0,001 | | | | | | | |
| 5 | -0,178 | -0,328 | 0,047 | 0,365 | 0,391 | 0,261 | 0,131 | 0,053 | 0,018 | 0,006 | 0,002 | | | | | | |
| 6 | 0,151 | -0,277 | -0,243 | 0,115 | 0,358 | 0,362 | 0,246 | 0,130 | 0,057 | 0,021 | 0,007 | 0,002 | 0,001 | | | | |
| 7 | 0,300 | -0,005 | -0,301 | -0,168 | 0,158 | 0,348 | 0,339 | 0,234 | 0,128 | 0,059 | 0,024 | 0,008 | 0,003 | 0,001 | | | |
| 8 | 0,172 | 0,235 | -0,113 | -0,291 | -0,105 | 0,186 | 0,338 | 0,321 | 0,224 | 0,126 | 0,061 | 0,026 | 0,010 | 0,003 | 0,001 | | |
| 9 | -0,090 | 0,245 | 0,145 | -0,181 | -0,266 | -0,055 | 0,204 | 0,328 | 0,305 | 0,215 | 0,125 | 0,062 | 0,027 | 0,011 | 0,004 | 0,001 | |
| 10 | -0,246 | 0,044 | 0,255 | 0,058 | -0,220 | -0,234 | -0,015 | 0,217 | 0,318 | 0,292 | 0,208 | 0,123 | 0,063 | 0,029 | 0,012 | 0,005 | 0,002 |
| 12 | 0,048 | -0,223 | -0,085 | 0,195 | 0,183 | -0,074 | -0,244 | -0,170 | 0,045 | 0,230 | 0,301 | 0,270 | 0,195 | 0,120 | 0,065 | 0,032 | 0,014 |
| 15 | -0,014 | 0,205 | 0,042 | -0,194 | -0,119 | 0,131 | 0,206 | 0,035 | -0,174 | -0,220 | -0,090 | 0,100 | 0,237 | 0,279 | 0,246 | 0,181 | 0,116 |

Les cases vides correspondent à des valeurs $\left|J_n(x)\right| < 10^{-3}$

$$s_m(t) = S_P.\cos\left[\Omega_P.t + m.\sin\left(\omega_i.t\right)\right]$$
$$= S_P.\left\{\cos\left(\Omega_P.t\right).\cos\left[m.\sin\left(\omega_i.t\right)\right] - \sin\left(\Omega_P.t\right).\sin\left[m.\sin\left(\omega_i.t\right)\right]\right\}$$
$$= S_P.\left\{J_0(m).\cos\left(\Omega_P.t\right) + J_1(m).\left[\cos\left(\left(\Omega_P + \omega_i\right).t\right) - \cos\left(\left(\Omega_P - \omega_i\right).t\right)\right] + J_2(m).\left[\cos\left(\left(\Omega_P + 2.\omega_i\right).t\right) + \cos\left(\left(\Omega_P - 2.\omega_i\right).t\right)\right] + ...\right\}$$