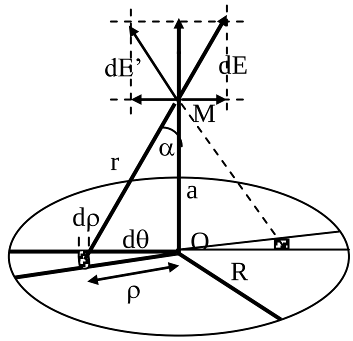
CHAMP ELECTRIQUE CREE PAR UN DISQUE.



On isole la surface élémentaire dS d’un anneau. (cf schéma ci-contre)
Cette surface est égale à la longueur de l’arc de cercle de rayon ρ vu sous l’angle dθ, multiplié par l’épaisseur dρ: $dS = \rho.d\theta.d\rho$

Le disque est chargé en surface, sa densité surfacique $\sigma = \dfrac{dq}{dS} > 0 \Rightarrow dq = \sigma.dS$

La charge portée par la surface dS considérée est : $dq = \sigma.\rho.d\rho.d\theta$
Cette charge élémentaire, considérée comme ponctuelle, crée en M à la distance r un champ élémentaire : $d\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\sigma.\rho.d\rho.d\theta}{r^2}\vec{u}_r$

La symétrie du problème veut pour toute surface dS il existe une surface dS’ symétrique par rapport à O. On s’aperçoit alors que les composantes normales à l’axe du disque s’annulent deux à deux. La direction du champ résultant est donc dirigée selon l’axe OM du disque.
Le champ résultant sera la somme de l’ensemble des composantes normales au disque dues aux surfaces élémentaires qui constituent le disque.

$$E = \iint dE.\cos\alpha = \iint \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma.\rho.d\rho.d\theta}{r^2}.\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{r} \Rightarrow E = \iint \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} a\frac{\sigma.\rho.d\rho.d\theta}{r^3}$$

$$r = \sqrt{\rho^2 + a^2} \Rightarrow r^3 = \left(\rho^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow E = \iint \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} a\frac{\sigma.\rho.d\rho.d\theta}{\left(\rho^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

On « sort » les termes constants du signe somme : $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sigma.a\iint \dfrac{\rho.d\rho.d\theta}{\left(\rho^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

On somme les surfaces élémentaires en faisant varier θ de 0 à 2π et ρ de 0 à R.
Pour résoudre l’intégrale double, on intègre d’abord par rapport à θ (ρ constant) puis on intègre par rapport à ρ.

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sigma.a\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^R \frac{\rho d\rho}{\left(\rho^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sigma.a\left[\theta\right]_0^{2\pi}\int_0^R \frac{\rho d\rho}{\left(\rho^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sigma.a.2\pi.\int_0^R \frac{\rho d\rho}{\left(\rho^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sigma.a.2\pi.\int_0^R \rho.\left(\rho^2 + a^2\right)^{-\frac{3}{2}} d\rho \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sigma.a.2\pi.\left[-\left(\rho^2 + a^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]_0^R$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sigma.a.2\pi.\left[-\left(R^2 + a^2\right)^{-\frac{1}{2}} + a^{-1}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sigma.a.2\pi.\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}}\right] = \frac{1}{2\varepsilon_0}\sigma.a.\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}}\right]$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2\varepsilon_0}\sigma.a.\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}}\right]}$$

La direction du champ est perpendiculaire au disque

Lorsque $R \to \infty \Rightarrow$ le disque devient un plan et $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ le champ en un point donné est indépendant de la distance du point considéré au plan.

Soient deux plans chargés en surface.
Le champ résultant en différents points