

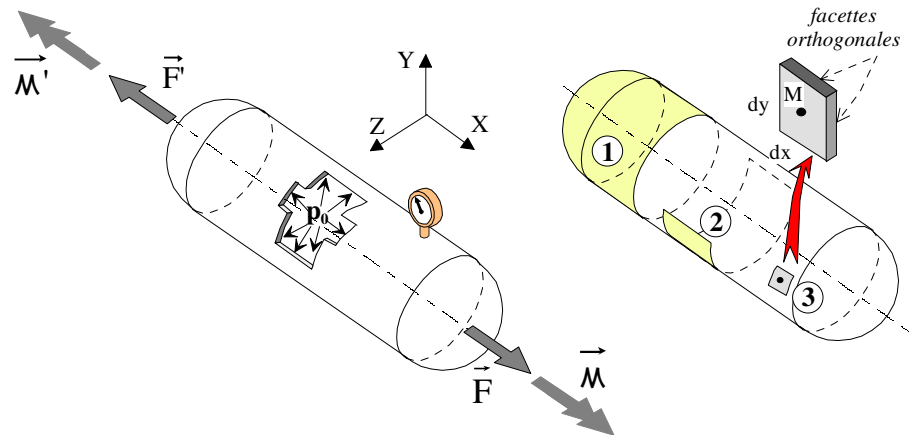
APPLICATION A UN ETAT PLAN DE CONTRAINTES : RESERVOIR SOUS PRESSION

1. OBJECTIF

Dans le cas de sollicitations simples considérées séparément, on peut identifier aisément la composante de la contrainte associée à la sollicitation et déterminer la direction suivant laquelle elle est la plus importante. Quand il s'agit d'une combinaison de sollicitations, des contraintes normales et tangentielles peuvent agir en même point. Il est donc nécessaire de développer une méthode d'analyse permettant d'identifier les contraintes les plus importantes en tout point de la structure ainsi que leur direction. L'étude du cas particulier de l'état plan de contraintes est l'objet de cette application simple.

Il s'agit de déterminer les contraintes caractéristiques autour d'un point de la tôle constituant un réservoir afin de les utiliser dans le cadre de son dimensionnement (épaisseur minimale de la tôle, caractéristiques des joints de soudures) ou d'une vérification réglementaire de ses dimensions

Ce réservoir tubulaire aux extrémités hémisphériques est en surpression interne d'intensité $\|p_0\|$, notée p_0 par la suite, et peut être soumis à des actions mécaniques extérieures (deux forces axiales et à deux moments axiaux) issues d'éléments structuraux d'un berceau mobile non représenté. La partie cylindrique du réservoir (virole cylindrique) est caractérisée par un rayon moyen "r" et par une épaisseur "e". (voir §3 Annexes).



Données :

- rayon moyen du réservoir : r = 400 mm
- épaisseur du réservoir e = 20 mm
- pression interne : $p_0 = 1.2$ MPa

- force axiale : $\vec{F} = X_F \vec{X} = +157000\vec{x}$ (N)
- moment axial : $\vec{M} = L_M \vec{X} = +20000000\vec{X}$ (N.mm)
- matériau : acier inoxydable (Z2CN18-10) : $Re = 185$ MPa

2. TRAVAIL DEMANDE

Afin de dimensionner ce réservoir on souhaite connaître l'état de contraintes en tout point M de la partie cylindrique du réservoir. Pour cela on propose les étapes suivantes de difficultés graduelles :

◆ étude du comportement du tronçon (1) isolé pour chacune des sollicitations extérieures : forces axiales et moments axiaux. Préciser le modèle de calcul adopté. Pour chaque sollicitation utiliser le canevas de travail suivant :

- bilan des actions mécaniques sur les parties structurales isolées
- torseur de cohésion
- calcul de ces contraintes et représentation graphique dans la section annulaire
- détermination de la distribution des contraintes autour du point M du petit élément de paroi (3) isolé,

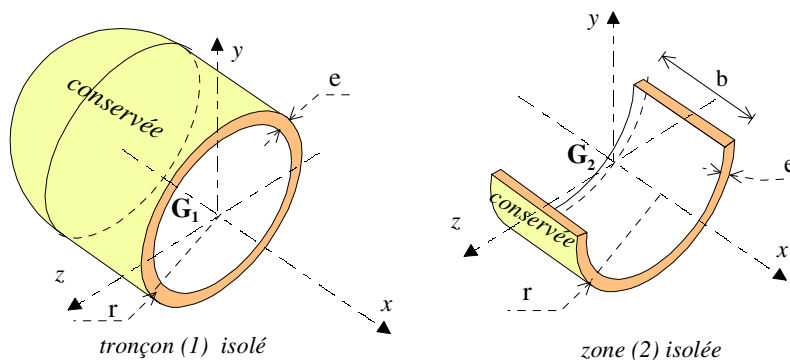
◆ étude du comportement du tronçon (1) isolé et ensuite celui de la zone (2) isolée soumis à la pression intérieure, avec un canevas de travail identique au précédent (voir §3 Annexes).

A partir des calculs des contraintes normales longitudinales et circonférentielles, formuler l'hypothèse pour que le cylindre du réservoir soit en état de contraintes planes (voir §3 Annexes)

◆ superposition des effets des trois sollicitations, construction du cercle de Mohr complétée par la démarche analytique de calcul des contraintes principales et de la contrainte tangentielle maximale.

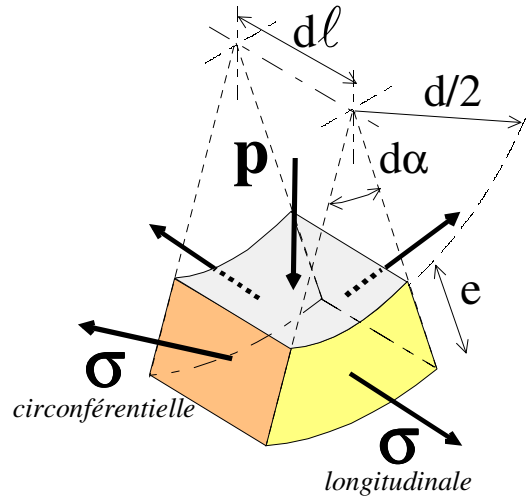
◆ Vérification de la condition de résistance

◆ Figures de travail à utiliser:



3. ANNEXES

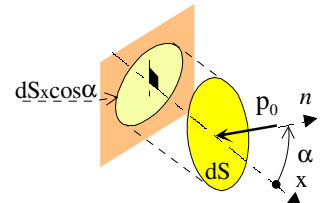
- **enveloppe mince sous pression** : réservoir dont l'épaisseur est très petite par rapport au diamètre intérieur, c'est-à-dire que $\frac{r}{e} \gg 1$ (>20). La modélisation du comportement se fait à partir de l'équilibre d'un petit élément de réservoir isolé (secteur angulaire d'épaisseur « e » avec deux dimensions infinitésimales) et sollicité par des forces de cohésion et de pression intérieure p. On considère les contraintes **constantes** dans l'épaisseur « e » du réservoir.



Pour simplifier l'étude, on propose de modéliser le comportement à partir d'un petit élément parallélépipédique de dimension $(dx \times dy \times e)$ dans un plan parallèle à xy. Mais ce modèle de calcul est incompatible avec l'état d'équilibre précédent. L'exercice propose de formuler des hypothèses pour y remédier.

- **définition de la pression** : on rappelle que le "vecteur pression" exercé par un liquide sur une paroi de normale sortante \vec{n} a pour expression $\vec{p} = -p_0 \vec{n}$.

- **surface projetée** : sur une facette d'aire dS dont la normale \vec{n} fait un angle α avec \vec{x} , l'effort élémentaire de pression vaut $d\vec{f} = -p_0 dS \vec{n}$. En projection sur la direction \vec{x} , on obtient: $d\vec{f} \cdot \vec{x} = -p_0 dS \vec{n} \cdot \vec{x} = -p_0 dS \cos \alpha$. La facette d'aire $dS \cos \alpha$ est la projection de dS sur un plan perpendiculaire à \vec{x} : c'est la surface projetée. L'ensemble des facettes dS constituant le fond du réservoir a pour surface projetée: $\int_{fond} dS \cos \alpha = \pi r^2$.



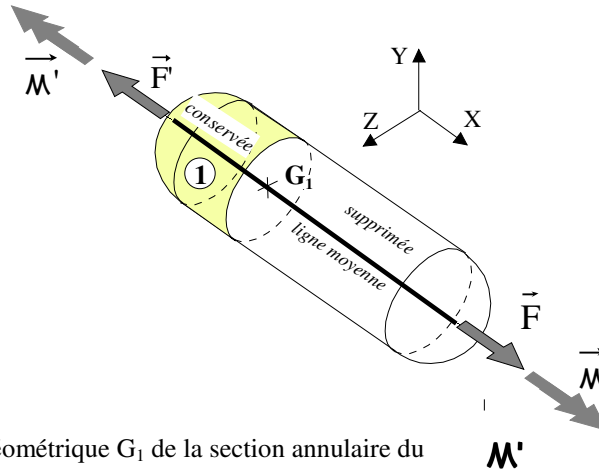
ELEMENTS DE CORRECTION

4. CONTRAINTES ENGENDREES PAR LES SOLLICITATIONS EXTERIEURES

4.1 Torseur cohésion

- ◆ modèle calcul : poutre (axe de révolution du réservoir : ligne moyenne de la poutre)
- ◆ torseurs des actions mécaniques extérieures appliquées sur le réservoir:

$$\{F_{\text{ext/sup}}\}_{G_1} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F} = X_F \vec{X} = +157000 \vec{X} \\ \vec{M} = L_F \vec{X} = +200000000 \vec{X} \end{array} \right\}_{G_1, R} \quad \text{et} \quad \{F_{\text{ext/cons}}\}_{G_1} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}' = -157000 \vec{X} \\ \vec{M}' = -200000000 \vec{X} \end{array} \right\}_{G_1, R}$$



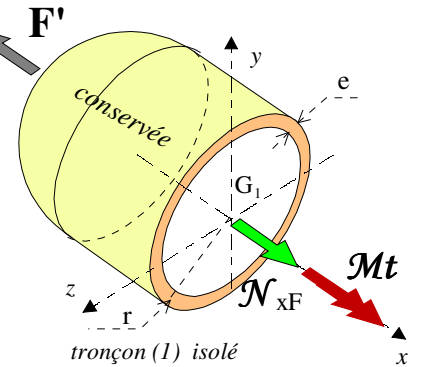
- ◆ torseur de cohésion au centre géométrique G_1 de la section annulaire du tronçon (1):

- partie conservée : tronçon (1)
- axe local \vec{x} : normale à la section droite et sortante de la matière de la partie conservée
- changement de base : Local (r) au Global (R):

$$\begin{Bmatrix} \vec{X} \\ \vec{Y} \\ \vec{Z} \end{Bmatrix}_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{Bmatrix}_r \Rightarrow \begin{Bmatrix} \vec{X} = \vec{x} \\ \vec{Y} = \vec{y} \\ \vec{Z} = \vec{z} \end{Bmatrix} \quad (\text{ici repères identiques})$$

$$\{Coh_{\text{sup/cons}}\}_{G_1} = \{F_{\text{ext/sup}}\}_{G_1} = -\{F_{\text{ext/cons}}\}_{G_1}$$

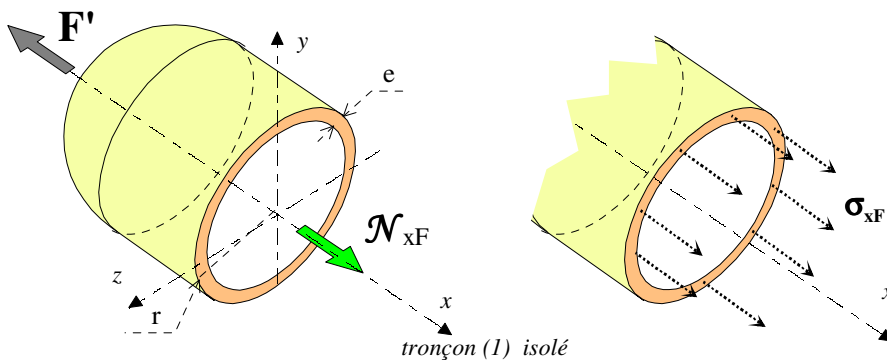
$$\text{donc } \{Coh_{\text{sup/cons}}\}_{G_1} = \left\{ \begin{array}{ll} N_x = +157000 & M_t = +200000000 \\ T_y = 0 & Mf_y = 0 \\ T_z = 0 & Mf_z = 0 \end{array} \right\}_{G_1}$$



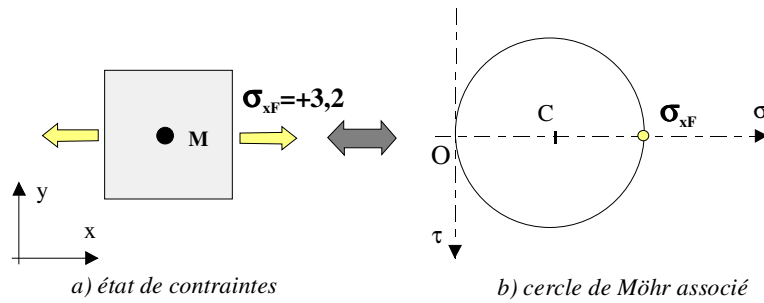
4.2 Contraintes engendrées par l'effort normal

- ◆ l'effort normal \vec{N}_{xF} engendre des contraintes normales : $\sigma_{xF} = \frac{N_{xF}}{S_{\text{annul}}}$ avec une distribution uniforme du fait de l'axisymétrie.

$$\text{A.N : } \sigma_{xF} = \frac{X_F}{2\pi \times r \times e} = \frac{157000}{2\pi \times 400 \times 20} = +3,12 \text{MPa}$$



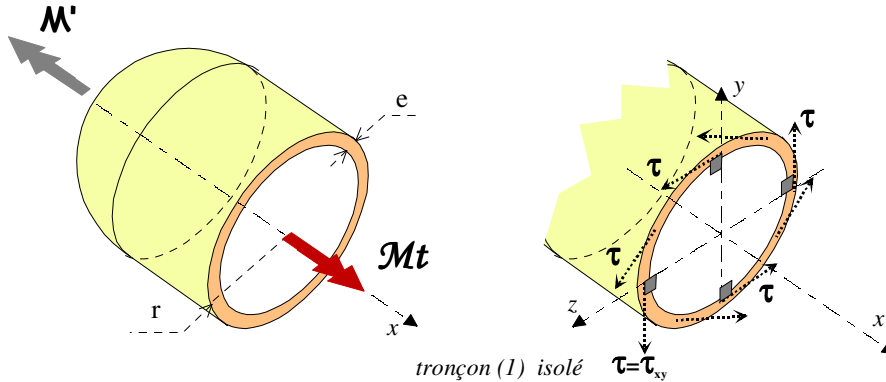
- ◆ distribution des contraintes autour du point M du petit élément de paroi (3)
Le petit élément de paroi (3) isolé est soumis aux contraintes σ_{xF} .



On peut remarquer que les directions \vec{x} et \vec{y} sont ici des directions principales (absence de contrainte tangentielle), à cette représentation est associée le tracé du cercle de Mohr

4.3 Contraintes engendrées par le moment de torsion

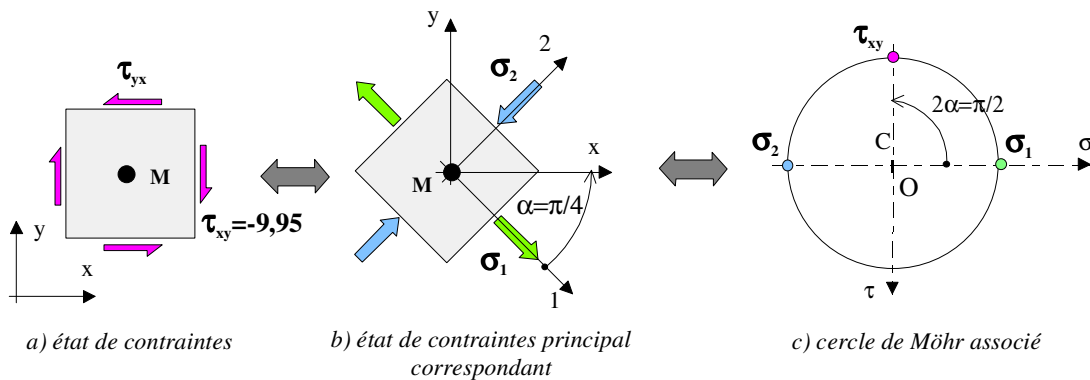
◆ le moment de torsion \vec{M}_t engendre des contraintes tangentielles : $\tau = \frac{M_t}{I_{O\text{annul}}} \times r = \frac{M_t}{J_{\text{annul}}} \times r = \frac{M_t}{2\pi \times r^3 \times e} \times r$.



A.N : $\tau = \frac{L_m}{2\pi \times r^2 \times e} = \frac{200000000}{2\pi \times 400^2 \times 20} \times 400 = 9,95\text{MPa}$

◆ distribution des contraintes autour du point M du petit élément de paroi (3)

Le petit élément de paroi (3) isolé est soumis aux contraintes tangentielles τ_{xy} et par réciprocité des contraintes tangentielles à τ_{yx}



5. CONTRAINTES ENGENDREES PAR LA PRESSION

5.1 Etude de l'équilibre du tronçon (1) isolé du réservoir soumis à la pression

→ sollicitation **longitudinale** de la conduite due à la pression
 - système isolé : tronçon (1)
 - bilan des actions mécaniques :
 ● efforts de pression agissant sur le fond intérieur de la conduite. La surface « projetée » du fond vaut : $\pi \times r^2$.
 La résultante de ces forces de pression s'écrit :

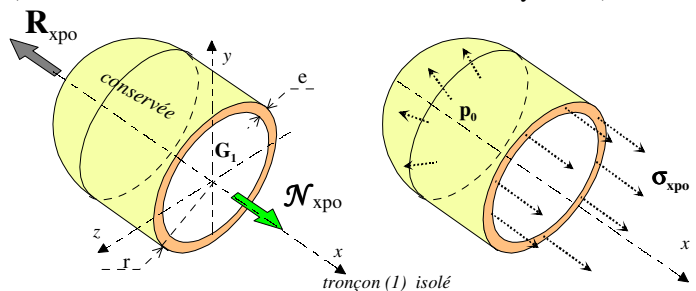
$$\left\{ \mathcal{F}_{\text{pres/tronçon cons}} \right\}_{G_1} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{xpo} = -p_0 \times \pi \times r^2 \vec{x} \\ \mathcal{M}_{\text{pres}/G_1} = \vec{0} \end{array} \right\}_{G_1}$$

● forces de cohésion normales et parallèles à \vec{x} (actions de la partie supprimée sur la partie conservée), agissant sur la section annulaire de normale parallèle à

- calcul de la contrainte normale longitudinale

$$\sigma_{xpo} = \frac{N_{xpo}}{S_{\text{annul}}} = p_0 \frac{r}{2e}$$

(avec une distribution uniforme du fait de l'axisymétrie)



$$\vec{x} : \{Coh_{sup/cons}\}_{G1}$$

- équilibre de ce tronçon (PFS) :

$$\{Coh_{sup/cons}\}_{G1} + \{F_{pres/tronçon\ cons}\}_{G1} = \{0\}_{G1}$$

$$\text{donc } \{Coh_{sup/cons}\}_{G1} = \left\{ \begin{array}{l} N_{xpo} = +p_0 \times \pi \times r^2 \quad M_t = 0 \\ T_y = 0 \quad Mf_y = 0 \\ T_z = 0 \quad Mf_z = 0 \end{array} \right\}_{G1}$$

$$\text{A.N : } \sigma_{xpo} = p_0 \frac{r}{2e} = 1,2 \frac{400}{2 \times 20} = 12 \text{MPa}$$

→ sollicitation **circconférentielle** de la conduite due à la pression

- système isolé : tronçon demi cylindrique, zone (2)

- bilan des actions mécaniques

● efforts de pression agissant sur la paroi interne du réservoir. La surface "projetée" de la paroi interne demi cylindrique suivant \vec{y} s'écrivant $2r \times b$, la résultante de ces forces de pression s'écrit :

$$\{F_{pres/tronçon\ cons}\}_{G2} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{yp} = -p_0 \times 2r \times b \times \vec{y} \\ \vec{M}_{pres/G2} = \vec{0} \end{array} \right\}_{G2}$$

● forces de cohésion longitudinales suivant \vec{x} déjà identifiées dans l'étude précédente ne sont pas considérées

● forces de cohésion normales et parallèles \vec{y} (actions de la partie supprimée sur la partie conservée) agissant sur les deux sections rectangulaires : $\{Coh_{sup/cons}\}_{G2}$

- équilibre de ce tronçon (PFS) :

$$\{Coh_{sup/cons}\}_{G2} + \{F_{pres/tronçon\ cons}\}_{G2} = \{0\}_{G2}$$

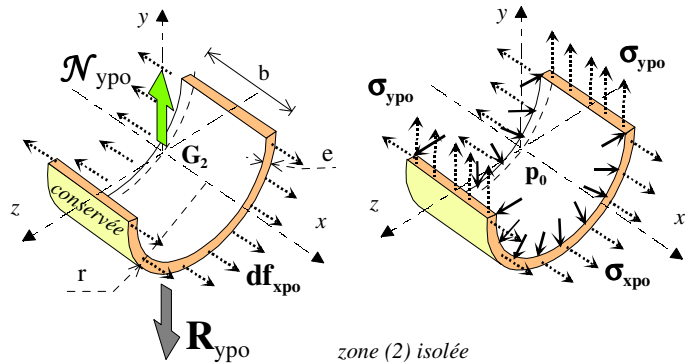
$$\text{donc } \{Coh_{sup/cons}\}_{G2} = \left\{ \begin{array}{l} N_{xpo} = +p_0 \times 2r \times b \quad M_t = 0 \\ T_y = 0 \quad Mf_y = 0 \\ T_z = 0 \quad Mf_z = 0 \end{array} \right\}_{G2}$$

- calcul de la contrainte normale circconférentielle

$$\sigma_{ypo} = \frac{N_{ypo}}{S_{coupures}} = p_0 \frac{r}{e}$$

(avec une distribution uniforme et identique pour chaque section rectangulaire du fait de l'axisymétrie).

$$\text{On remarque: } \sigma_{ypo} = 2\sigma_{xpo} = p_0 \frac{r}{e}$$



$$\text{A.N : } \sigma_{ypo} = p_0 \frac{r}{e} = 1,2 \frac{400}{20} = 24 \text{MPa}$$

5.2 Distribution des contraintes autour du point M du petit élément de paroi (3)

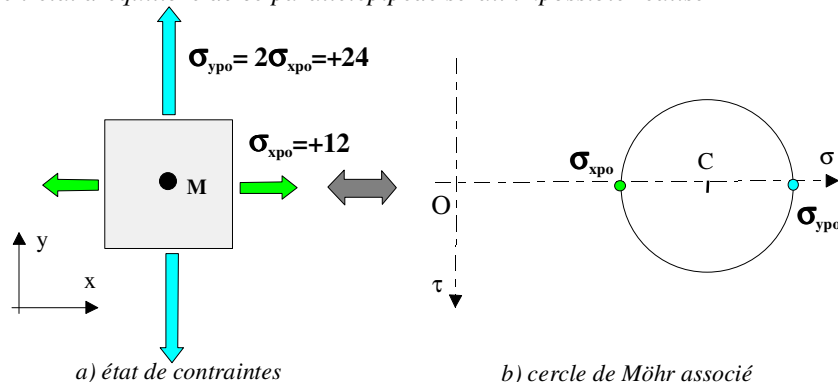
Le petit élément de paroi (3) isolé est soumis aux contraintes σ_{xpo} et $\sigma_{ypo} = 2\sigma_{xpo}$.

Remarque : ce petit élément est aussi soumis à une pression p_0 suivant la direction \vec{z} perpendiculaire au plan (xy), correspondant à une contrainte normale. Il ne s'agit donc pas ici en toute rigueur d'un état plan de contraintes. Cependant, compte tenu de l'hypothèse d'un réservoir à paroi mince, caractérisé par une grande valeur $\frac{r}{e} \gg 1$, la relation

$\sigma_{ypo} = 2\sigma_{xpo} = p_0 \frac{r}{e}$ indique alors que σ_{xpo} et $\sigma_{ypo} \gg p_0$. L'effet transversal de la pression p_0 peut être donc négligé (*)

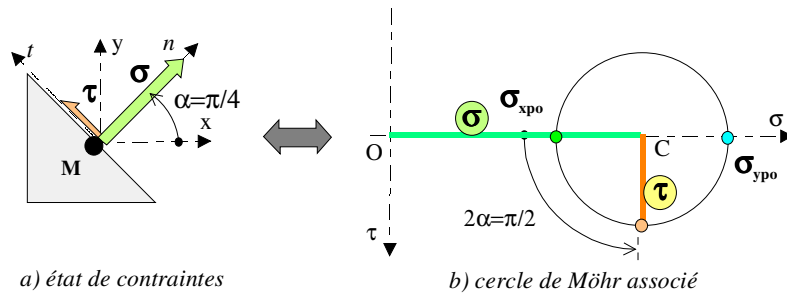
devant σ_{xpo} et σ_{ypo} et on se retrouve le cadre de l'état plan de contraintes.

(*) : dans le cas contraire l'état d'équilibre de ce parallélépipède serait impossible réaliser



On peut remarquer que les directions \vec{x} et \vec{y} sont ici des directions principales (absence de contrainte tangentielle), à cette représentation est associée le tracé du cercle de Mohr

Pour information, sur une coupure du tube dont la normale fait par exemple l'angle de 45° avec \vec{x} on a représenté l'état de contraintes déduit de la construction de Mohr



a) état de contraintes

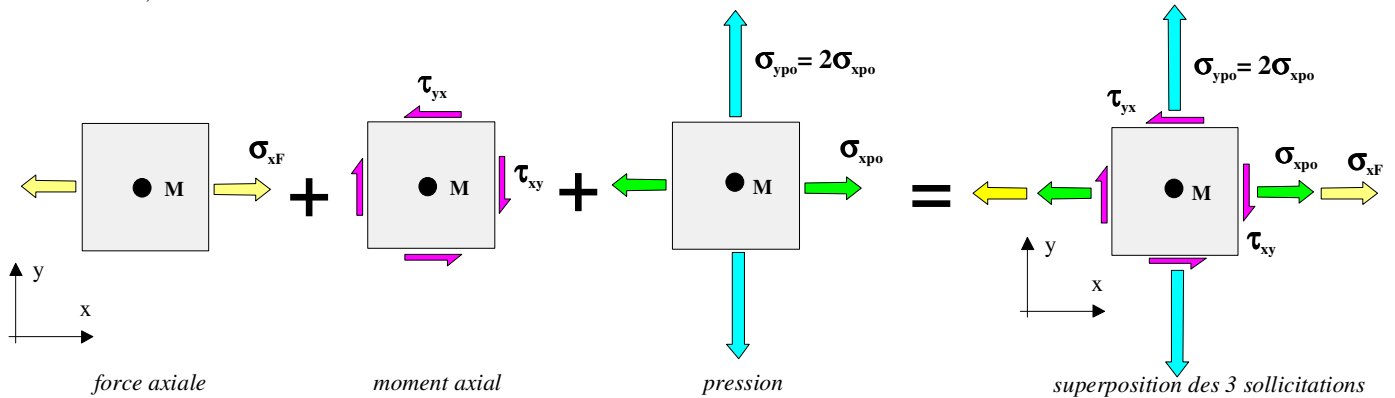
b) cercle de Mohr associé

On note pour valeurs :

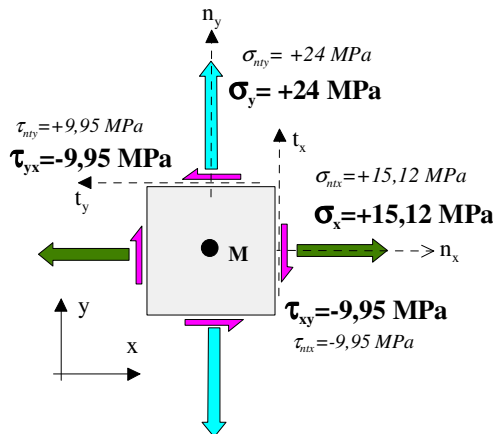
$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 1.5 \sigma_x \quad ; \quad \tau = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} = 0.5 \sigma_x$$

6. SUPERPOSITION DES EFFETS DES TROIS SOLLICITATIONS

Autour du point M du domaine élémentaire (3) $dx \times dy$ et d'épaisseur « e », l'état plan de contraintes résultant des trois sollicitations, se résume à :



A.N. :



Attention :

- les valeurs des contraintes portées sur les figures de situation des facettes autour du point M sont exprimées dans le repère (\vec{x}, \vec{y}) lié à l'élément (3)
- les valeurs des contraintes portées sur le cercle de Mohr sont exprimées dans des repères locaux liés (\vec{n}, \vec{t}) à chaque facette

→ Représentation de Mohr de l'état de contraintes

- tracer l'état de contraintes au point M sur des facettes orthogonales orientées par les axes \vec{x} et \vec{y} en portant les segments

suivants sur le repère $(\vec{\sigma}, \vec{\tau})$:

$$\overline{OF} = \sigma_{ntx} = +15,12, \quad \overline{OI} = \tau_{ntx} = -9,95 \Rightarrow \text{point P}$$

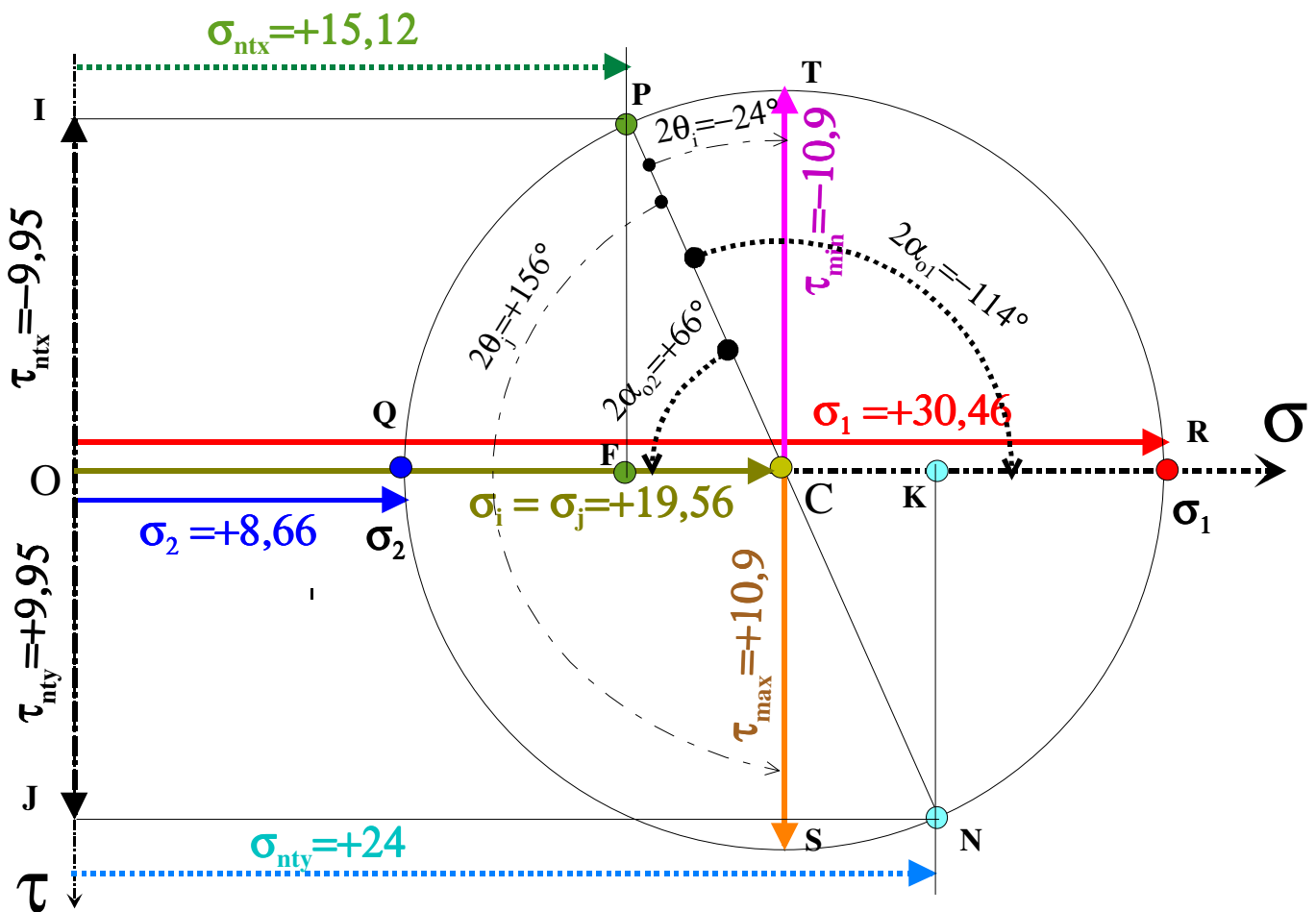
$$\overline{OK} = \sigma_{nty} = +24, \quad \overline{OJ} = \tau_{nty} = +9,95 \Rightarrow \text{point N}$$

(rappel : valeurs des contraintes exprimées en repères locaux)

- l'intersection du segment PN avec l'axe des $\vec{\sigma}$ donne le point C centre du cercle de Mohr de rayon $CP = CN$ (les points P et N sont donc diamétralement opposés et correspondent aux contraintes sur les deux facettes orthogonales respectivement orientées par les normales \vec{x} et \vec{y})

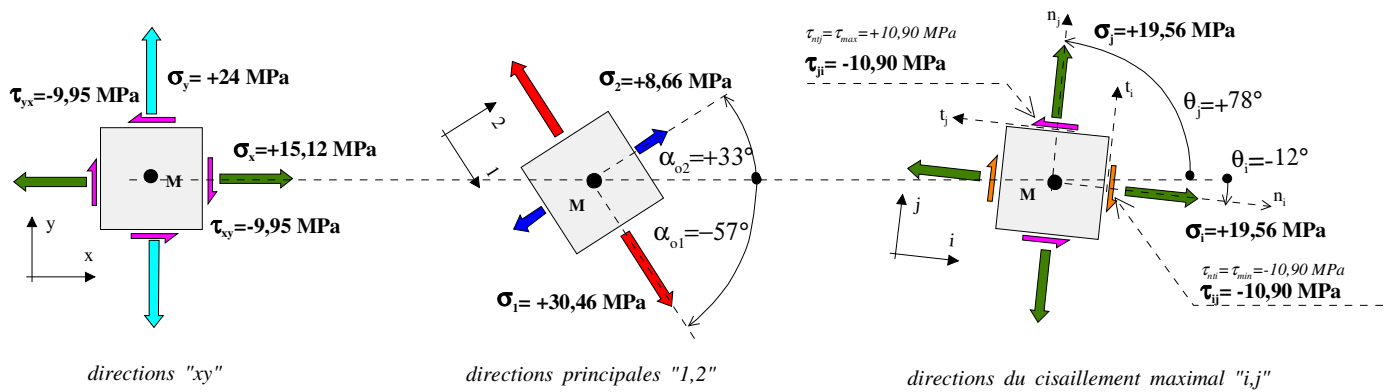
- ce cercle coupe l'axe des $\vec{\sigma}$ en R et Q, on obtient alors les contraintes principales : $\overline{OR} = \sigma_1$ et $\overline{OQ} = \sigma_2$

- identification des angles d'orientation des axes : à partir de P (en ce point les contraintes au point M relative à la facette de normale d'axe \vec{x} sont connues) tracer les doubles des angles d'orientation des directions principales par rapport à l'axe \vec{x} en balayant le cercle Mohr par exemple
- de P vers R (sens **négatif**) pour obtenir $2\alpha_{01} < 0$ et sur l'élément (3) en déduire la direction principale $\hat{1}$ en portant $\alpha_{01} < 0$ (sens **négatif**) par rapport à l'axe \vec{x}
- de P vers Q (sens **positif**) pour obtenir $2\alpha_{02} > 0$ et sur l'élément (3) en déduire la direction principale $\hat{1}$ en portant $\alpha_{02} > 0$ (sens **positif**) par rapport à l'axe \vec{x}
(on a volontairement choisi des parcours angulaires de sens opposés pour montrer que cela n'a pas d'importance si les angles α et 2α sont décrits dans les **mêmes** sens sur les représentations des facettes et du cercle de Mohr)
- aux points S et T on obtient respectivement les valeurs extrêmes des contraintes tangentielles $\tau_{\max} = +10,90\text{MPa}$ et $\tau_{\min} = -10,90\text{MPa}$ pour des angles $2\theta_i = -24^\circ$ et $2\theta_j = +156^\circ$ par rapport à CP qui permettent d'orienter les normales \hat{i} et \hat{j} des facettes orthogonales de -12° et $+78^\circ$ par rapport à l'axe \vec{x} . Les deux contraintes normales portées par ces normales \hat{i} et \hat{j} sont identiques $\sigma_i = \sigma_j = +19,56\text{MPa}$. On peut remarquer des angles $+90^\circ$ et $+270^\circ$ (angles non indiqués sur le cercle) par rapport à l'axe des $\vec{\sigma}$ qui permettent d'orienter les normales \hat{i} et \hat{j} des facettes orthogonales de $+45^\circ$ et $+135^\circ$ par rapport à la direction principale $\hat{1}$.



→ Les trois états de contraintes sur les facettes orthogonales issus à la construction de Mohr

- sur les figures les angles sont mesurés à partir de l'axe des \vec{x} et décrits dans les mêmes sens que sur le cercle de Mohr



→ **Méthode analytique de calcul des contraintes :**

- détermination des deux contraintes principales :

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = +30,46 \text{ MPa} \quad \text{et} \quad \sigma_{\min} = \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = +8,66 \text{ MPa}$$

- détermination des deux angles des directions principales des contraintes normales maxi et mini respectivement 1 et 2 :

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \times -9,95}{15,12 - 24} = +2,24 ; \quad 2\alpha_0 = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = +66^\circ (\text{mod ulo } 180^\circ),$$

$$\alpha_0 = +33^\circ (\text{mod ulo } 90^\circ) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{01} = +123^\circ (\text{mod ulo } 180^\circ) = +303^\circ \\ \alpha_{02} = +33^\circ (\text{mod ulo } 180^\circ) = +33^\circ \end{cases}$$

- détermination de la contrainte tangentielle maximale : τ_{\max} ou $\tau_{\min} = \pm \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} = \pm 10,90 \text{ MPa}$

- détermination des contraintes normales correspondant à cet état de cisaillement : $\sigma_i = \sigma_j = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = +19,56 \text{ MPa}$; en général ces contraintes normales ne sont pas nulles mais sont toujours égales

- détermination des deux angles des directions de cisaillement maxi et min (mêmes valeurs absolues) respectivement \hat{i} et \hat{j} par rapport à l'axe \vec{x} :

$$\theta_j = \alpha_{02} + 45^\circ = 33^\circ + 45^\circ = +78^\circ \quad \text{et} \quad \theta_i = \alpha_{01} + 45^\circ = -57^\circ + 45^\circ = -12^\circ$$

(ou respectivement $+135^\circ$ et $+45^\circ$ par rapport à la direction principale $\hat{1}$)

→ **Interprétation physique : représentations du vecteur contrainte globale dans les axes fixes relatifs à l'ellipse de Lamé**

Si l'état de contraintes principales est connu, on montre que l'extrémité du vecteur contrainte totale $\vec{C}_{M,x}$ au point M pour une facette de normale \vec{x} d'angle $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ par rapport à la direction principale $\hat{1}$, décrit une ellipse de demi-axes σ_1 et σ_2 ayant pour équation $\frac{C_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{C_2^2}{\sigma_2^2} = 1$ avec $\vec{C}_{M,x} = C_1 \hat{1} + C_2 \hat{2} = \sigma_1 \cos \alpha \hat{1} + \sigma_2 \sin \alpha \hat{2}$. Cette ellipse s'appelle l'ellipse des contraintes (ou de Lamé) relative au plan principal $(\hat{1}, \hat{2})$.

Problème : autour du point M, pour l'état de contraintes principales donné et pour la facette de normale \vec{x} , ici d'angle $\alpha_{01} = (\hat{1}, \vec{x}) = +57^\circ$ avec l'angle $0 < \alpha_{01} < \frac{\pi}{2}$ par rapport à la direction principale $\hat{1}$, on souhaite connaître :

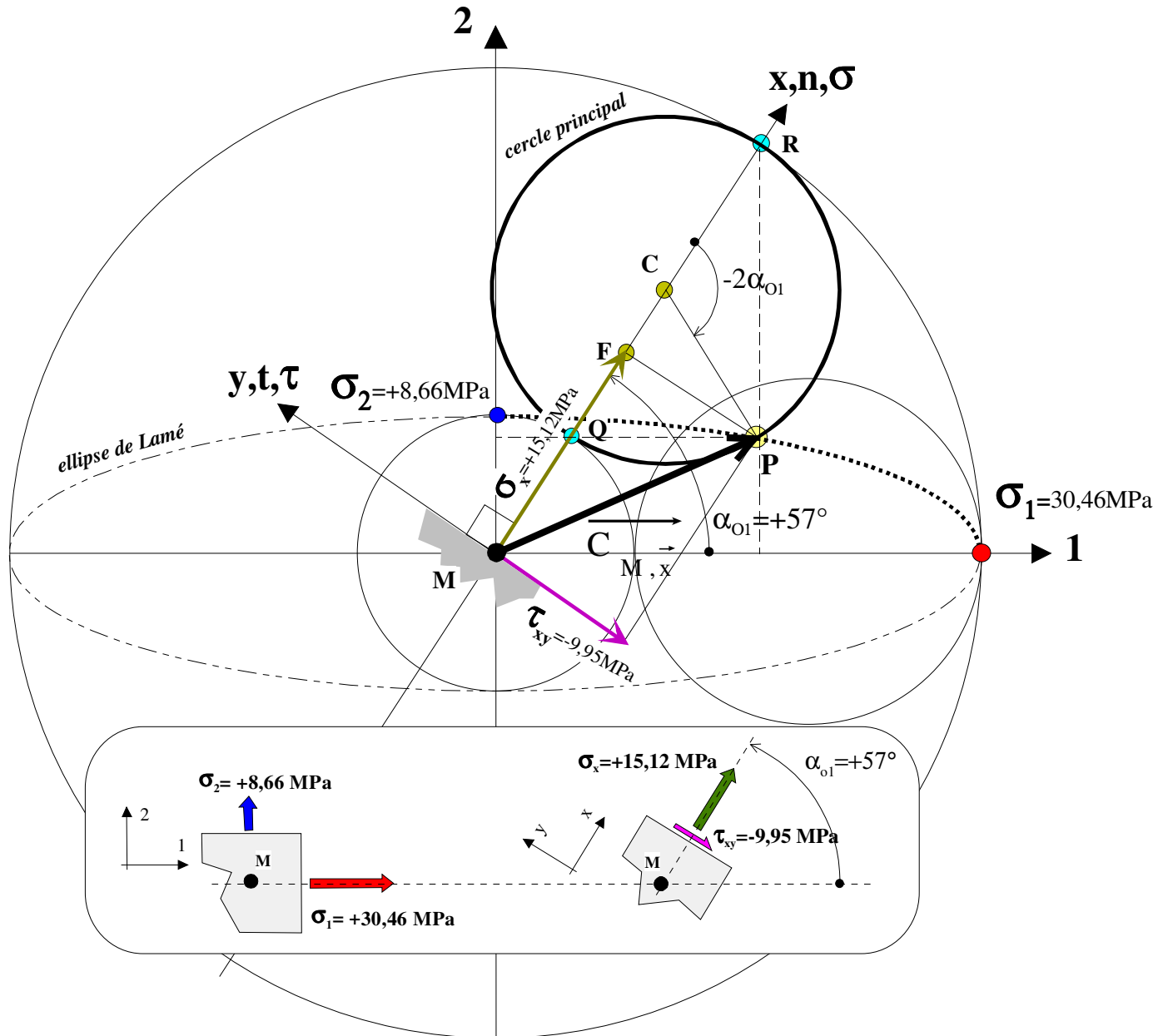
- le vecteur contrainte globale $\vec{C}_{M,x}$

- les deux composantes normale et tangentielle du vecteur contrainte globale $\vec{C}_{M,x} = \sigma_x \vec{x} + \tau_{xy} \vec{y}$

Construction géométrique d'un point de l'ellipse : au point M on trace le repère principal $(\hat{1}, \hat{2})$ et deux cercles concentriques, ici de rayons $\sigma_1 = +30,46 \text{ MPa}$ et $\sigma_2 = 8,66 \text{ MPa}$. La normale \vec{x} coupe les deux cercles en R et Q. Du point Q (sur cercle σ_2) on mène une perpendiculaire à $\hat{2}$ et du point R (sur cercle σ_1) une perpendiculaire à $\hat{1}$. L'intersection de ces deux droites donne le point P, c'est un point de l'ellipse de Lamé et l'extrémité de $\vec{C}_{M,x}$. Par projection dans le repère (\vec{x}, \vec{y}) lié à la facette, on obtient ses deux composantes : $\vec{C}_{M,x} = \sigma_x \vec{x} + \tau_{xy} \vec{y} = +15,12 \vec{x} - 9,95 \vec{y}$ (on retrouve des valeurs conformes à celles utilisées

pour tracer le cercle de Mohr précédent). A partir de C milieu de QR on peut tracer le cercle principal de rayon $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$, l'intersection de ce cercle et de l'ellipse donne naturellement le point P (analogie avec la représentation de Mohr déjà vue). On

peut remarquer que ces deux représentations l'angle $\alpha_{01} = (\vec{1}, \vec{x})$ et l'angle $2\alpha_{01} = (\vec{x}, \vec{CP})$ sont décrits en sens opposés, alors que sur la représentation de Mohr seule les deux angles sont décrits par le même sens pour plus de commodité



→ **Condition de résistance (matériaux ductiles) :**

Les enceintes sous pression doivent satisfaire aux exigences de plusieurs réglementations (Codap par exemple qui permet de déterminer les épaisseurs de la virole cylindrique et du fond, les piquages, les renforcements d'ouverture, les brides de fixation). Dans le cadre de cet exercice on se limitera à l'utilisation du « **critère de Von Mises** » (*) comme condition de résistance à appliquer quelles que soient les orientations de facettes autour du point M et qui permettrait de justifier l'épaisseur de la virole suivant certaines conditions d'utilisation non formulées dans cette application.

$$\sigma_{\text{éq V. Mises}} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} = \sqrt{15,2^2 + 24^2 - 15,2 \times 24 + 3 \times 9,95^2} = 27,18 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{éq V. Mises}} = \sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_j^2 - \sigma_i \sigma_j + 3\tau_{ij}^2} = \sqrt{19,56^2 + 19,56^2 - 19,56 \times 19,56 + 3 \times 10,90^2} = 27,18 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{éq V. Mises}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \times \sigma_2} = \sqrt{30,46^2 + 8,66^2 - 30,46 \times 8,66} = 27,18 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{éq V. Mises}} < R_e = 185 \text{ MPa} \text{ condition de résistance largement vérifiée}$$

(*) : ou critère de l'énergie de distorsion maximale : on montre que le début de l'écoulement plastique se produit lorsque l'énergie de distorsion atteint une valeur critique

En utilisant le critère classique de la « **contrainte normale maximale** » qui consiste à prendre la contrainte principale maximale et à la comparer à la limite élastique du matériau utilisé on montre qu'ici $\sigma_1 = +30.46 \text{ MPa}$ est inférieur à R_e donc l'écoulement plastique ne se produira pas.

Remarque : les deux critères ne prédisent pas nécessairement tous les deux l'écoulement ou le non écoulement, tout dépend des valeurs des contraintes principales utilisées.

Un autre critère est parfois utilisé « **critère de Tresca** » (ou critère du cisaillement maximal : on montre que l'écoulement plastique se produit lorsque la contrainte de cisaillement maximale $\tau_{\max} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2}$ atteint une valeur critique. Dans le cas d'un chargement plan hydrostatique $\sigma_1 = \sigma_2$ le critère de Tresca ne prédit aucun écoulement puisqu'il n'existe pas de cisaillement dans cet état de contrainte- le cercle de Mohr est un point- le matériau se rompra sans déformation permanente !)

→ **Intérêt de rechercher les directions principales et les directions de cisaillement maxi :**

Suivant ces directions, on peut imaginer des dispositions constructives intégrant des liaisons structurales (soudures, boulons, rivets) et qui assurent l'assemblage de tôles constituant la virole. Il faut trouver les niveaux de contraintes qui agissent suivant ces directions pour dimensionner ces composants.

De plus les axes du repère global de la structure ne sont pas nécessairement les directions où se situent les contraintes maxi et mini.

La construction de Mohr s'avère être un outil rapide de résolution graphique pour la détermination de l'état des contraintes sur des facettes orthogonales autour d'un point, tout en vérifiant la cohérence mécanique du champ des contraintes (équilibre de l'élément sous l'action des **forces de cohésion élémentaires**)